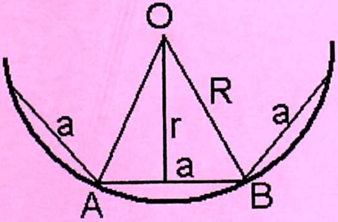
аб.ч/к

Аширбаева А.Ж., Абдрасулов Ж.А.,
Ободоева Г.С.

ЭЛЕМЕНТАРДЫК МАТЕМАТИКАНЫ КАЙТАЛАЙБЫЗ



Ош - 2008

Кыргыз Республикасынын билим берүү жана илим министрлиги

М.М. Адышев атындагы Ош технологиялык университети

Инженердик педагогика факультети

«Колдонмо математика» кафедрасы

Аширбаева А.Ж., Абдрасулов Ж.А., Ободоева Г.С.

Элементардык математиканы кайталайбыз

Ош - 2008

УДК 510
ББК 22.10
А98

Басылып чыгууга Ош технологиялык университетинин
Окумуштуулар Кеңешинде бекилген.

Рецензенттер: физика-математика илимдеринин кандидаты, доцент Артыков А.Ж.,
Ош шаарындагы Ош облустук жөндөмдүү балдарды окутуп тарбиялоочу Уркуя Салиева атындагы лицей-мектебинин математика мугалими, Кыргыз Республикасына эмгек сиңирген мугалим Жолдубаева А.

Аширбаева А.Ж. ж.б
А98 Элементардык математиканы кайталайбыз. /А.Ж. Аширбаева, Ж.А. Абдырасулов, Г.С. Ободоева. - Ош: 2008. – 80 б.

ISBN 978-9967-03-462-4

Бул окуу колдонмо жогорку окуу жайларына кирүүчүлөр үчүн математика боюнча тесттик текшерүүгө сунуш кылынган программанын негизинде түзүлгөн. Анын орчундуу максаты – абитуриенттерге математика сабагы боюнча тесттик текшерүүгө даярданууда жана биринчи курстун студенттери үчүн алардын орто мектепте математикадан алган билимдерин ыраатка келтирүүгө жардам берүү болуп саналат.

Окуу колдонмонун негизги педагогикалык максаты: мурда кабылданган билимдерди «тоголоктоп» бир жыйынга келтирүү менен аларды жалпылаштырып, системага салуу жана аны кайрадан өз алдынча «чыйралта» билүү үчүн айрым дидактикалык ыкмаларды көргөзүүнү көздөгөн.

Бул болсо, өз учурунда өзгөчө өз алдынча билим деңгээлдерин жогорку даражага көтөрүүнү көздөгөн абитуриенттерге жана университеттин биринчи курсунун студенттерине жардам берип, аларга пайдалуу көмөк көрсөтө алат. Арийне, ар кандай сапаттуу жана терең билим алуу системалуу өз алдынча зор аракетти талап кылат. Кабылданган билим терең, көрөңгөлүү жана сапаттуу болушу үчүн билимди кабылдоочу субъектин тынымсыз, терең жана көрөңгөлүү билимди пайда кылуучу акыл эмгегин коротушу зарыл.

А 1602010000-08
ISBN 978-9967-03-462-4

УДК 510
ББК 22.10

КИРИШҮҮ

Баарыбыз күткөндөй XXI кылым өз эсебин ыкчам кагууда. Ал болсо урунттуу жана жетишкен информациялык - маалымат, ошондой эле өнүккөн технологиянын кылымы болоору шексиз.

Демек, коомубузда жаңы татаал рыноктук-экономикалык байланыштардын жана дүйнөлөшкөн кабарлар – информациялык технологиясынын ар тараптан сапаттуу да, көлөмдүү да бекемделиши күтүлүүдө. Ошон үчүн, айрыкча биздин жаштарыбыздын тиешелүү билим деңгээлдери жогору жана бекем сапаттуу болгону учурдун талаптуу мерчеми. Белгилүү болгондой, арийне ар кандай атайын жана жогорку билимдин өзөгүн же пайдубалын жалпы орто билимдин негизи түзөт. Ошентип, кабылдануучу билимдердин терең мазмундуулугуна, табияттын, кубулуштардын, турмуштун жана айлана-чөйрөнүн байланыштарын, ошондой эле жашоодогу жана илимий ачылыштарга урунттуу жыйынтыктарды жаштарга таанытуудагы, билим менен кошо жугумдуу таалим-тарбия берүүдөгү маани-маңызына жана кабылдануу формасының жеткиликтүүлүгүнө карасак, аларга кадыресе жугумдуу билим менен тарбия берип, орто мектептеги берилген /кабылданган/ билимдердин деңгээлин жана сапатын аныктоого жана жогорулатууга болоор эле. Анткени, азыркы учурда жаштарыбыздын арасында билимсиздик жана тарбиясыздык кадыресе эле көрүнүшкө айланууда.

Чындыкты туура айтып, түз моюндасак, айтор азыркы биздин жаштарыбыздын (айрыкча, акыркы жылдардагы бүтүрүүчүлөрүбүздүн) орто билимдеринин деңгээли менен сапаты өтө төмөн, начар, жана сандык катышы деле алгылыксыз болуп калууда. Булардын жүйөөлү да, кадиксиз да, ар түркүн себептери бар. Ошого карабастан, биз жаштарыбыздын билимдерин дагы, алган билимдериндеги сапаттык жана илимдүүлүк кемчиликтерин дагы толуктоого мажбур болобуз. Анткени, жогорку окуу жайында (айрыкча, технологиясын) билимди терең алып, коомго керектүү, терең маалыматтуу адис болуу үчүн жаштарыбыздын орто мектептик билим деңгээлдери жогору жана сапаттуу алган тарбиялары жугумдуу болуштары кажет. Айталы, орто мектепти бүтүрүүчүлөрүбүздүн математикалык билимдери формуладай кыскалыгы, таамай жана тактыгы, эң негизгиси жалпылоочу мерчеми жана системалуулугу регионалдык жана дүйнөлүк талаптарга жооп бериши абзел. Мындай талаптар тесттик текшерүүлөрдө толук коюлат жана аныкталат. Кемчиликтери болсо, толуктоого мажбур болобуз.

Ошентип, орто мектептеги кабылданган билимдерди сапаттуу деңгээлде кайрадан эске түшүрүү, ал эми билимдердин өзөктүү бөлүктөрүн негиз кылып алып, маанилүүлөрүн жана орчундууларын анын уюлдук тегерегине «тоголоктоп» алуу керек болгон учурда аларды маңыздуу мерчемде кайрадан кабылданган билимди чыйралта билүү - бул педагогикалык процесстеги психолого-дидактикалык талаптар болуп саналат.

Биздин ушул окуу кодонмо орто мектептин жана университеттин I курсунун студенттериндеги математикалык билимдерди өзөктүү негизде маанилүү кайталап, чыгууга кесипкөйлүк негизде жардам берүү болуп саналат. Арийне, учурунда кабылданган билим жаш адамдын аң-сезиминде кыска, элестетүүгө таамай жана так, ошондой эле эске тутууда керек болгон учурда жаттап калууга жеңил, эң негизгиси жалпылоочу жана системалуу өзөккө эгедер болуусу кажет. Ал үчүн кабылданган билим терең мазмунга ээ болгон сапатта калыптанган болсо, андай билимдерди жаш инсандын каалоо тилеги тарабынан узак убакытка чейин өз өмүрүндө эске тутууга болоор эле. Андай болбогон ченде, жаш адам өз билимдериндеги кемчилдиктерди жоюуга милдеткер. Себеби, ал жогорку билим алып, бир асыл кесиптин ээси болууга умтулууда. Биздин усулдук колдонмо болсо, так ушул максатта орто мектептин деңгээлиндеги математикалык билимдерди ыраатка келтирүү менен эске салууну (өз алдынча билимди «чыйралта» билүүнү) көздөйт. Бекеринен, «Кайталоо - окуунун энеси»- деп айтылбайт эмеспи.

I БАП. ЭЛЕМЕНТАРДЫК МАТЕМАТИКА БОЮНЧА ПРОГРАММАЛЫК ӨЗӨКТҮҮ ТҮШҮНҮКТӨР

Жогорку окуу жайына (ЖОЖго) кирүүчүлөр математика боюнча тесттик текшерүүдөн өткөндө төмөнкүлөрдү билүүлөрү зарыл:
а) программада көрсөтүлгөн аныктамаларды жана теоремаларды айкын билүү жана аларды далилдей алуу;
б) негизги жана орчундуу математикалык ойлорду так жана кыскача түрүндө билүү, тийиштүү математикалык символдорду колдонууну үйрөнүү жана керек болгон учурда колдоно билүү;
в) программада каралган математикалык маалыматтарга жана машыгууларга ишенимдүү ээ болуу менен мисалдарды жана маселелерди чыгарууда аларды пайдаланууну өздөштүрүү.

ЖОЖдорго кирүүчүлөр үчүн математика боюнча программа үч бөлүмдөн турат. Алардын биринчиси мисал – маселелерди чыгарууда колдонуучу негизги математикалык түшүнүктөр менен фактыларды пайдалана билүү, теоремаларды далилдөө, аларды тиешелүү учурда колдонууну билүү. Ал эми экинчи бөлүмдө далилдене турган теоремалар көрсөтүлгөн. Тесттик текшерүүнүн теориялык бөлүгүнүн мазмуну ушул бөлүмдөн алынышы керек. Үчүнчү бөлүмдө болсо болочок абитуриент билүүгө тийиш болгон негизги математикалык билимдер жана машыгуулар саналып көрсөтүлгөн.

§1. Негизги математикалык түшүнүктөр жана фактылар

1. *Арифметика, алгебра жана анализдин башталышы.*

1. Натуралдык сандар. Жөнөкөй жана курама сандар. Бөлүнүүчү, бөлүүчү. Эң чоң жалпы бөлүүчү, эң кичине жалпы бөлүнүүчү.
2. 2;3;4;5;9;10;11 деген сандарга бөлүнүүчүлүк белгилери.
3. Бүтүн сандар. Рационалдык сандар, аларды кошуу, кемитүү, көбөйтүү жана бөлүү. Рационалдык сандарды салыштыруу.
4. Анык сандар, аларды ондук бөлчөк түрүндө туюнтуу.
5. Сандардын түз сызыкта сүрөттөлүшү. Анык сандын модулу, анын геометриялык мааниси.
6. Сандык туюнтмалар. Өзгөрүлмөлөрү бар туюнтмалар. Кыскача көбөйтүүнүн формулалары.

7. Натуралдык жана рационалдык көрсөткүчтүү даражалар. Арифметикалык тамыр.
8. Логарифмалар, алардын негизги касиеттери.
9. Бир мүчө жана көп мүчө.
10. Бир өзгөрүлмөлүү көп мүчө. Квадраттык үч мүчөнүн тамыры.
11. Теңдеме. Теңдеменин тамырлары. Тең күчтө теңдемелер жөнүндө түшүнүк.
12. Барабарсыздык. Барабарсыздыктардын чыгарылышы. Тең күчтөгү барабарсыздыктар жөнүндө түшүнүк.
13. Тендемелердин жана барабарсыздыктардын системалары. Системалардын чыгарылышы.
14. Арифметикалык жана геометриялык прогрессиялар. Арифметикалык прогрессиянын n-чи мүчөсүнүн жана алгачкы мүчөсүнүн суммасынын формуласы. Геометриялык прогрессиянын n-чи мүчөсүнүн жана алгачкы мүчөсүнүн суммасынын формуласы.
15. Функция түшүнүгү, анын берилиш жолдору, аныкталуу обласы, маанилеринин көптүгү. Берилген функцияга тескери функция.
16. Функциянын графиги. Функциянын өсүшү жана кемиши, мезгилдүүлүгү, жуптугу, тактыгы.
17. Сызыктуу $y = ax + b$;, квадраттык $y = ax^2 + bx + c$, даражалуу $y = ax^n \quad (n \in N)$, $y = \dfrac{k}{x}$, көрсөткүчтүү $y = a^x$,

логарифмалык $y = \log_a x$, тригонометриялык: $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$, арифметикалык тамырлуу $y = \sqrt{x}$ функцияларынын аныктамалары жана алардын негизги касиеттери.

18. Эки аргументтин суммасынын жана айырмасынын синусу жана косинусу (формулалары).
19. $\sin\alpha \pm \sin\beta$, $\cos\alpha \pm \cos\beta$ туюнтмаларын көбөйтүндүгө өзгөртүү.
20. Туундунун аныктамасы. Анын физикалык жана геометриялык мааниси.
21. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = x^n \quad (n \in Z)$, $y = a^x$ функцияларынын туундулары.
22. Функциянын берилген аралыктагы өсүшүнүн (кемишинин) жетиштүү шарты. Функциянын экстремум түшүнүгү. Функциянын экстремумунун зарыл шарты (Ферманын

теоремасы). Экстремумдун жетиштүү шарты. Функциянын берилген аралыктагы эң чоң жана эң кичине маанилери.

23. Анык эмес жана аныкталган интегралдар, аныкталган интегралдардын колдонулушу.

2. *Геометрия (планиметрия жана стереометрия)*

1. Түз сызык, шоола, кесинди, сынык сызык, кесиндинин узундугу. Бурч, бурчтун чоңдугу. Вертикалдык жана жандаш бурчтар. Айлана, тегерек. Жарым түз сызыктар.
2. Көп бурчтук, анын чокулары, жактары, диагоналдары.
3. Үч бурчтук, анын медианасы, биссектрисасы, бийиктиги. Үч бурчтуктун түрлөрү. Тик бурчтуу үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын арасындагы байланыш.
4. Төрт бурчтуктар: параллелограмм, тик бурчтук, ромб, квадрат, трапеция.
5. Айлана жана тегерек. Борбор, хорда, диаметр, радиус. Айланага жаныма. Айлананын жаасы. Сектор.
6. Борбордук жана ичтен сызылган бурчтар.
7. Үч бурчтуктун, тик бурчтуктун, параллелограммдын, ромбдун, квадраттын, трапециянын аянттарынын формулалары.
8. Айлананын узундугу жана айлананын жаасынын узундугу. Бурчтун радиандык чени. Тегеректин аянты жана сектордун аянты.
9. Фигураларды өзгөртүүгө мисалдар, симметриянын түрлөрү. Кыймыл. Анын касиеттери. Окшош өзгөртүү жана анын касиеттери.
10. Векторлор. Векторлор менен амалдар. Коллинеардуу векторлор.
11. Окшоштук. Окшош фигуралардын аянттарынын катышы.
12. Тегиздик. Параллель жана кесилишүүчү тегиздиктер.
13. Түз сызык менен тегиздиктин параллелдиги.
14. Түз сызыктын тегиздик менен түзгөн бурчу. Тегиздикке перпендикуляр.
15. Эки грандуу бурчтар. Эки грандуу бурчтун сызыктуу бурчу. Эки тегиздиктин перпендикулярдуулугу.
16. Көп грандыктар. Алардын чокулары, кырлары, грандары, диоганалдары. Тик жана жантык призма, пирамида. Туура призма жана туура пирамида. Параллелепипеддер, алардын түрлөрү.
17. Айлануу фигуралары: цилиндр, конус, сфера, шар. Сферанын

жана шардын борбору, радиусу, диаметри. Сферага жаныма тегиздик.

18. Параллелепипеддин көлөмүнүн формуласы.
19. Призманын бетинин аянтынын жана толук бетинин аянтынын жана көлөмүнүн формулалары.
20. Пирамиданын бетинин аянтынын, толук бетинин аянтынын жана көлөмүнүн формулалары.
21. Цилиндрдин бетинин аянтынын, толук бетинин аянтынын жана көлөмүнүн формулалары.
22. Конустун бетинин аянтынын, толук бетинин аянтынын жана көлөмүнүн формулалары.
23. Шардын жана анын бөлүктөрүнүн көлөмдөрүнүн формулалары.
24. Сферанын аянтынын формуласы.

§2. Негизги математикалык формулалар жана теоремалар

1. Алгебра жана анализдин башталышы

1. $y = ax + b$ функциясынын касиеттери жана анын графиги.
2. $y = \dfrac{k}{x}$ функциясынын касиеттери жана анын графиги.
3. $y = ax^2 + bx + c$ функциясынын касиеттери жана анын графиги.
4. Квадраттык тендеменин тамырларынын формуласы.
5. Квадраттык үч мүчөнү сызыктуу көбөйтүүчүлөргө ажыратуу.
6. Сан барабарсыздыктарынын касиеттери.
7. Көбөйтүндүнүн, даражанын, тийиндинин логарифми.
8. $y = \sin x$, $y = \cos x$ функцияларынын аныктамасы, касиеттери жана алардын графиктери.
9. $y = \mathrm{tg} x$ функциясынын аныктамасы, касиеттери жана анын графиги.
10. $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg} x = a$ түрүндөгү теңдемелердин чыгарылыштары.
11. Келтирүүнүн формулалары.
12. Бир эле аргументтин тригонометриялык функцияларынын арасындагы көз карандылык.
13. Кош аргументтин тригонометриялык функциялары.
14. Эки функциянын суммасынын туундусу.

15. Эки функциянын көбөйтүндүсүнүн туундусу.
16. Эки функциянын тийиндисинин туундусу.
17. Функциянын графигине жаныма.

2. Геометрия (планиметрия жана стереометрия)

1. Тең капталдуу үч бурчтуктун касиеттери.
2. Кесиндинин учтарынан бирдей алыстатылган чекиттердин касиеттери.
3. Түз сызыктардын параллелдик белгилери.
4. Үч бурчтуктун бурчтарынын суммасы. Томпок көп бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы.
5. Параллелограммдын белгилери.
6. Үч бурчтуктун сыртына сызылган айлана.
7. Үч бурчтуктун ичине сызылган айлана.
8. Айланага жаныма жана анын касиеттери.
9. Айланага ичтен сызылган бурчтарды ченөө.
10. Үч бурчтуктардын окшоштуктарынын белгилери.
11. Пифагордун теоремасы.
12. Косинустар теоремасы.
13. Синустар теоремасы.
14. Параллелограммдын, үч бурчтуктун, трапециянын аянттарынын формулалары.
15. Тегиздиктеги эки чекиттин арасындагы аралыктын формуласы.
16. Түз сызык менен тегиздиктин параллелдик белгиси.
17. Тегиздиктердин параллелдигинин белгиси.
18. Векторду координата октору боюнча ажыратуу.
19. Түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдуулугу жөнүндө теорема.
20. Эки тегиздиктин перпендикулярдуулугу.
21. Эки тегиздиктин параллелдиги жана перпендикулярдуулугу жөнүндө теоремалар.

§3. Негизги математикалык билимдер жана ык - машыгуулар

Математикадан абитуруенттер жана университеттин биринчи курстун студенттери төмөнкүлөрдү билүү керек:

1. Ондук жана жөнөкөй бөлчөктөр түрүндө берилген сандар менен арифметикалык амалдарды жүргүзүү; берилген сандарды жана эсептөөнүн жыйынтыгын талаптагы тактыкта тегеректөө, жыйынтыгын болжолдуу өлчөмүн баамдай билүү; эсептөөнү жүргүзүү үчүн калькулятөр жана таблицаны пайдалануу.
2. Көп мүчөлөргө өзгөрүлмөлөрдү камтыган бөлчөктөргө жана даражалуу, көрсөткүчтүү, логарифмалык жана тригонометриялык функцияларды камтыган туюнтмаларга тендеш өзгөртүүлөрдү жүргүзүү.
3. Сызыктуу, квадраттык, даражалуу, көрсөткүчтүү, логарифмалык жана тригонометриялык функциялардын графиктерин түзүү.
4. Биринчи жана экинчи даражадагы теңдемелер менен барабарсыздыктарды, аларга келтирилүүчү теңдемелер менен барабарсыздыктарды чыгаруу; биринчи жана экинчи даражадагы жана аларга келтирилүүчү теңдемелер менен барабарсыздыктардын системаларын чыгаруу. Буга ошондой эле даражалуу, көрсөткүчтүү, логарифмалык жана тригонометриялык функцияларды камтыган жөнөкөй тендемелер менен барабарсыздыктар кирет.
5. Теңдемелерди жана теңдемелер системасын түзүүгө маселелерди чыгаруу.
6. Геометриялык фигураларды чиймеде, сүрөттө жана тегиздикте жөнөкөй түзүүлөрдү аткара билүү.
7. Алгебралык маселелерди чыгарууда геометриялык түшүнүктөрдү колдонуу, ал эми геометриялык маселелерди чыгарууда алгебранын жана тригонометриянын ыкмаларын колдонуу.
8. Векторлор менен амалдарды (векторлорду кошуу жана кемитүү, векторду санга көбөйтүү) жүргүзүү менен бул амалдардын касиеттерин пайдалануу.
9. Функциянын өсүшүн (кемишин), экстремумун изилдөө жана анын графигин түзүүдө туунду түшүнүгүн пайдалануу.

Орто мектепте функция түшүнүгү орчундуу түшүнүктөрдөн. Ошон үчүн математика сабагынан орто мектептин курсунда өзгөрүлмө жана функция түшүнүгү белгилүү даражада жогору туруусу абзел. Негизги билимдер, ык-машыгуулар, көндүмдөр жана негиздүү системадагы түшүнүктөр жаш адам тарабынан түбөлүктүү жана алгылыктуу кабылданган болушу үчүн кабылданган билимдердин жашоодо, турмушта жана практикада колдонулуштарын ырааттуу ишке ашыруу максатында талап кылынган учурда жекече эс тутумдан кайрадан эске сала билүү да орчундуу психолого-педагогикалык талап болууга тийиш. Так мына ушуну аткаруу үчүн орто мектепти бүтүрүүчүлөрдүн жекече өз алдынча билимин толуктоо менен камсыздоо учурдун талабы болууда. Математикалык билимдерди системага жана ырaатка салуу жогорудагы педагогикалык талаптардын ишке ашырылышында орчундуу орунда турат. Мурда орто мектепте ар түрдүү сапатта жана деңгээлде кабылданган математикалык билимдерди кайтадан дурустап, сапатын жогорулатып, тереңирээк жана өзөктүүрөөк эске түшүрүүдө ар түрдүү эске салуучу жана эстеп калууга оң мааниде жардам берүүчү математикалык схемалар, матрицалар, таблицалар жана түстүү же ар түркүн түспөлдөрдө жазылган «кайталоочу жазууларды»колдонсо болот. Мындай жазууларды биз «Дидактикалык парадигмалар» деп атайбыз. Бул парадигма деген сөз маани, маңыз, модель же схема дегенди билдирет.

II БАП. МАТЕМАТИКАЛЫК БИЛИМДЕРДИ ТОЛУКТООНУН ЖАНА ӨРКҮНДӨТҮҮНҮН АЙРЫМ ЫКМАЛАРЫ

§1. Билимди өндүрүмдүү жана маанилүү кайталап чыгуунун керектүү айрым дидактикалык өзгөчөлүктөрү

Келечекте жогорку окуу жайына кирип, өз билимиңди жогорулатып, сапаттуу кесипке умтулуу үчүн керектүү билимге ээ болгуң келсе, анда математикадан тесттик текшерүүгө даярданууда төмөнкү кеңештерге көңүл бөлүүңөрдү өтүнөбүз.

1. Даярдоо курсунда окуган учуруңда же консультацияга отурганыңда, окутуучуну көңүл коюп уккун да, сабакта эмнелер жөнүндө сөз болуп жатканын эсиңе сактап калганга аракеттен.
2. Даярдоо курсундагы сабакта же консультацияда катышканда өзүңө өзүң максат кое бил: эгерде азыр кайталанып жаткандарды мен так ушундай сапатта өздөштүрбөсөм, анда бүгүнкү күнүм бекер кеткени дегендей ойлон же ушул сабакта мен азыраак болсо дагы өз билимимди нукура деңгээлде толуктоо жана бышыктоо боюнча жаңылык ачышым зарыл-деп өзүңө сын көз караш менен карай бил.
3. Өз алдынча тесттик текшерүүгө даярданган убактыңда эске тутуунун эң керектүү жана ыңгайлуу сааттарын пайдалан. Ал сааттар: эрте мененки саат 8 ден 12 ге чейин жана түштөн кийин болсо саат 15 тен кийинки убакыттар.
4. Өз алдынча маңыздуу кайталоодо жана өзөктүү билимдерди эске салууда окуу материалдарын үч жолудан кайталап, аң сезимдүү жана этаптуу эске сала билүүнү үйрөн. Алар убакыт өлчөмүндө төмөнкүдөй болсо, дурус болот:
   а) ар бир 20 минутта;
   б) ар бир 7 сааттан кийин;
   в) бир сутка өткөндөн кийин.
5. Даярдануу учурунда сабактан же консультациядан кийинки алгачкы алты саатта өтө көп кабылданган билимдер эстен тез чыгаарын эстей жүр.
6. Үйгө берилген тапшырмаларды аткарууда окуу материалдарын кайра-кайра эле кайталап окуй бербеш керек. Ал көп деле пайдалуу эмес. Андан көрө азыраак болсо дагы жазып окугун, керектүү жерлерин белгиле.
7. Окуу-программалык материалдарды же тесттик текшерүүчү

суроолордун жоопторун өзүңдүн сөзүң менен кайталап айтып бере алсаң, анда алар сенин эсиңде сөзсүз үнөмдүү калыптанат.

8. Окуу-программалык материалдарды ар түрдүү "схемалар" же "таяныч формулалары" жана "кайталоочу-матрицаларды" пайдаланып кайталоо, эске түшүрө билүүнүн жана нукура билимди кабылдоонун эң олжолуу ыкмалары боло алат.
9. Мурда кабылданган билимдерди сапаттуу кайталоо үчүн айрым окуу материалдарын дагы өзөктүү жана маанилүү бөлүктөрдү же уюлдук жана маңыздуу түшүнүктөрдү өз алдынча таба билген жана негиздүү билимдердин топтомун ошолордун тегерегинде топтой алгандын зарылчылыгы өтө чоң экендигин эске ала жүргөн оң болот.
10. Ар түркүн сапатта жана деңгээлде мурда кабылданган билимдерди эң жогорку өзөктүү жана маанилүү таризде эске түшүрө билиш үчүн, окуу-программалык материалдарды "кургак жаттабастан", алардагы өзөктүү, маанилүү жана маңыздуу бөлүктөрдү өзүнчө бөлүп түшүнө билүүгө жана өз алдынча аларды « өрмөктүү тоголоктой» алууга, ал эми керек болгон учурда ал түшүнүктөрдү кайрадан "чыйралтып ажырата" билүүнү үйрөн. Ал керектүү да, тынымсыз акыл эмгегин талап кылган опурталдуу да акылдын жана сезимдин аракети экендигин билген жакшы.

Азыркы учурда математикалык тесттик текшерүүгө даярданган учурда абитуриенттер жана студенттер "формалдуу жаттап билим алганды" жокко чыгарып, түпкүлүктүү жана сапаттуу билим алганга, кабылданган билимдердин түркүмүн маңыздуу таризде эске түшүрө билүүнү өздөштүрүштөрү зарыл. Абитуриенттер өздөрүнүн билим деңгээлдерин сапаттуу жогорулатууну (которууну) самашса, анда алар алгач өздөрүнүн ой жүгүртө билүүлөрүн өстүрүштөрү абзел. Ой гана жаш адамдын ички туйгууларын жана издөөлөрүн жогору өстүрө алат. Математикалык билимдер дагы жаш адамдын логикалуу жана диалектикалык ой жүгүртүүсүн өстүрөт. Мурда кабылданган билимдердин тутумдарын маанилүү жана маңыздуу кайталап чыга билүүнү ар бир жаш инсан билүүсү зарыл жана жетиштүү болот.

§2. "Тоголок - түйүндүү" негизде берилген билимдерди жандырып-чыйралтуунун айрым ыкмалары

Математикалык кабылданган билимдердин эң орчундуу топтомун, алардын "тоголоктонуп түзүлүп" жана билимди кабылдоочу субьектин аң сезиминде сакталган, ар кандай сапатта жана деңгээлде анын ой жүгүртүүсүндө калыптанган өзөктүү билимдерди (окуу-программалык материалдарды) кайрадан өз алдынча «чыйралтып жандыра» билүүгө үйрөтүү - бул ар бир окуучунун, угуучунун жана студенттин эске тутуусун жеңилдетет, эске түшүрүүсүн ыкчамдатат, ошондой эле "жаттап билим алуунун" көлөмүн кескин азайтат.

Так ушундай мурда кабылданган жана калыптанган билимдерди өз алдынча "чыйралта" билүүнүн математика сабагы боюнча айрым дидактикалык ыкмаларын көрсөтөлү. Айталы, орто мектептин V жана VI класстарында окутулган төмөндөгү айрым математикалык түшүнүктөрдү "чыйралтууну" карап көрөлү:

1) барабардык, барабарсыздык; сандык туюнтмалар, теңдемелер;

2) жөнөкөй бөлчөктөр; дурус жана буруш бөлчөк;

3) бурч, бурчтун биссектрисасы; жайылган бурч жана тик бурч; тар жана кең бурчтар; вертикалдык жана кайчылаш бурчтар; перпендикуляр болгон түз сызыктар.

Бул математикалык түшүнүктөрдү окуучулардын, студенттердин же угуучулардын өз алдынча эстерине түшүрүшүп, "чыйралта" билүүсүн үйрөтүү үчүн төмөндөгүдөй зарыл нерселерди (дидактикалык көрсөтмөлөрдү) аларга көргөзүүбүз зарыл:

1) жалпы схемалык формулаларды жана чиймелерди көрсөтүү;

2) мурда окутулган бардык таяныч түшүнүктөрдү берүү менен, алардын сөздүк терминдерин, шарттуу белгилерин, сөздүк өзгөчө түшүнүктөрүн көрсөтүү;

3) өз алдынча эске түшүрүү үчүн дидактикалык керектүү багыттарды көргөзүү менен көпчүлүк учурда сөзсүз эске түшүрүүчү жардамчы түшүнүктөрдү педагог көрсөтүп койгону пайдалуу.

Эми өз алдынча тапшырмалар түрүндө көрсөтөлү.

Биринчи тапшырма: төмөндөгү түшүнүктөрдү өз алдынча эске түшүргүлө: сандык туюнтмалар, барабардык, барабарсыздык, теңдеме.

Тапшырмага түшүндүрмө:

Көрсөтүлгөн математикалык түшүнүктөрдү (обьектилерди) өз алдынча “чыйралтуу” үчүн төмөндөгүлөрдү аткаруу зарыл:

а) даяр түрдө берилген схемаларды карап, маанилүү ой жүгүртүү керек;

б) чиймелердеги, формулалардагы жана схемалардагы окшоштуктарды табуу жана жазып чыгуу;

в) өзгөчө айырмаланган белгилерди көрсөтүү; аларды да жазып алуу зарыл;

г) табылган (жазып алынган) белгилер боюнча тиешелүү аныктамаларды түзүү жана жазып чыгуу керек. Мисалы, сандык туюнтмаларда, барабардыктарда жана барабарсыздыктарда – -баарында математикалык жазуулар сандардан, тамгалардан жана цифралардын белгилеринен турат. Булар, ошол түшүнүктөрдүн жалпы гана белгилери. (бирок алар, орчундуу эмес).

Ал эми алардын айырмалуу белгилерин табуу үчүн алардагы бириктирүүчү белгилерди, жазууларды жана белгисиздерди көргөзүүбүз кажет.

Эми тиешелүү формулаларды жана схемаларды өзүнчө көргөзөбүз:

I. $a = b \leftrightarrow b = a$, $2=5-3 \Leftrightarrow 5-3=2$;

$a \geq b \leftrightarrow b \leq a$, $10<15$; $12>5$; $7<14$;

$2x + 3 = 15$ $28>2x+3$;

$a \div b = b \div a$ $3x+3<15$;

$(6+3)-1=(26+14)-32$ $x+12=19$;

$10x - 5 = 15; \quad x = 2$ $a-20=30$;

$(7 + x) + 14 = 21; \quad x = 0$ $(30-10)+16=y$; $y=36$

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$ өз ара тескери сандар болушат.

Биринчи тапшырма: төмөнкү теңдемеден белгисиз х ти тапкыла.

$$x\cdot\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$$

$$\begin{tikzcd}
x=\frac{5}{7}:\frac{3}{4} \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & x=\frac{5}{7}\cdot\frac{4}{3} \arrow[dl] \\
& \frac{7}{5}:\frac{3}{4}=\frac{7}{5}\cdot\frac{4}{3} &
\end{tikzcd}$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}=к \\ \frac{c}{d}=k\end{array}\right\} \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad \text{пропорция} \quad a:b=c:d$$

Негизги касиети: $a\cdot d=b\cdot c$- болуп саналат.

Экинчи тапшырма: Төмөндөгү “тоголоктонгон” математикалык түшүнүктөрдү өз алдыңарча “чыйралтып” чыккыла: жөнөкөй бөлчөктөр; дурус жана буруш бөлчөктөр; ондук бөлчөктөр.

Тапшырмага түшүндүрмө: Бул түшүнүктөрдөгү жалпы белгилер: бардык математикалык түшүнүктөр жалаң сандар менен берилет. Ал эми алардагы өзгөчө белгилер: жөнөкөй бөлчөктөр горизонталдык сызыктардын астына (бөлүмүнө) жана үстүнө (алымына) жазылат, ал эми ондук бөлчөктөр үтүр менен жазылат.

Бул биз жогоруда көрсөткөн биринчи жана экинчи тапшырмалардын аткарылышын төмөндөгүдөй схема-таблица түрүндө көрсөтсө болот. Аны биз “кайталоо-матрицасы” деп айтабыз.

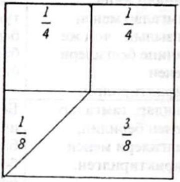
№1 матрица

Математикалык обьектилер	Жалпы белгилери	Айырмалуу белигилери	Аныктамасы
Сандык туюнтмалар	Сандар жана белгилер менен берилген математикалык жазуу	Амал белгилери менен бириктирилген	Сандардан турган, амал белгилери менен бириктирилген жазуу математикалык д.а.

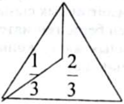
Барабардык	Сандар, тамгалар жана амал белгилери менен бириктирилген жазуу	Эки туюнтма барабардык белгиси менен бириктирилген	Амал белгилери менен бириктирилген ”барабардык” белгиси менен бириктирилген математикалык туюнтма.
Барабарсыздык	Сандар жана тамгалар менен жазылып чоң же кичине белгилери менен бириктирилген	Жазуу эки туюнтма менен берилип, барабарсыздык белгиси менен	“Чоң” жана “кичине” белгилери менен бириктирилген математикалык туюнтма-барабарсыздык болуп саналат.
Теңдеме	Сандар, тамгалар менен берилип, белгилери менен бириктирилген.	Белгилерди өз ичине алып, барабардык белги менен берилген.	Тамга жана сандар менен берилип, белгисизди өз ичине алган туюнтма-теңдеме
Жөнөкөй бөлчөк	Натуралдык сандардан жазылган	1. Бир сызыктан эки сандан турат. 2. Алым – үстүндөгү бөлүгүнүн санын билдирет,астындагы бөлүмү-бөлүгүн билдирет.	Алымы жана бөлүмү бар горизонталдык сызык менен берилген математикалык жазуу жөнөкөй бөлчөк д.а.
Дурус бөлчөк	Жөнөкөй бөлчөк	Алымы бөлүмүнөн кичине	Эгерде жөнөкөй бөлчөктө алымы бөлүмүнөн кичине болсо, анда ал буруш дурус д.а.
Буруш бөлчөк (аралаш сан)	Жөнөкөй бөлчөк	Алымы бөлүмүнөн чоң. Буруш бөлчөктү аралаш санга айлантса болот.	Эгерде жөнөкөй бөлчөктө алымы бөлүмүнөн чоң болсо, анда ал буруш д.а.
Ондук бөлчөк	Сандар менен берилген математикалык жазуу болот	1) Сандардан жана үтүрдөн турат. 2) Үтүрдөн мурунку сан бүтүн, кийинкиси бөлчөк бөлүгү.	Бүтүн жана бөлчөк бөлүктөрү бар, сандар менен үтүрдөн жазылган бөлчөк-ондук бөлчөк д.а.

Эми болсо экинчи тапшырманын схемалуу "чыйралтуу" ыкмасын көрсөтөбүз.

II. Жөнөкөй бөлчөк $\frac{5}{6}$ $\frac{\textit{алымы}}{\textit{болуму}}=\frac{m}{n}$.



$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$



$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1.$$

$\frac{2}{9}<\frac{5}{9}$;

$\frac{b}{a}$ бөлчөгү үчүн:

$\frac{3}{4}>\frac{1}{4}$;

$\frac{b}{a}$ да $b<a$ – дурус бөлчөк: $\frac{5}{11}<1$;

$\frac{2}{5}=\frac{4}{10}=\frac{8}{20}=\ldots$;

$a\le b$ - буруш бөлчөк: $\frac{9}{8}>1$;

$2:3=(1+1):3=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$;

$\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}$;

$8:5=\frac{8}{5}=\ldots$;

$$^{4/}\frac{11}{20}+{}^{5/}\frac{9}{16}=\frac{44+45}{80}=\frac{89}{80}=1\frac{9}{80}.$$

$3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}\longleftarrow$ бөлчөк; $\qquad 9=\frac{9}{1}=\frac{18}{2}=\ldots;$

бүтүн $\longrightarrow 5\frac{2}{3}=\frac{15}{3}+\frac{2}{3}=\frac{17}{3};$

0,4=0,40=0,400=…;

6 дм 3 см=$6\frac{3}{10}$ дм=6,3 дм; $\qquad 7\frac{21}{1000}$=7,021;

6 дм 3 см= 63 см=$\frac{63}{100}$ м=0,63 м;

3,14 м+2,83 м=5,97 м;

$$6{,}4+5{,}28=\begin{array}{r}6{,}40\\ +\ \\ 5{,}28\\ \hline 11{,}68\end{array}$$ - ондук бөлчөктөрдү кошуу үчүн…;

$$114{,}8-71{,}35=\begin{array}{r}114{,}80\\ 71{,}35\\ \hline 43{,}45\end{array}$$ - ондук бөлчөктөрдү кемитүү үчүн…;

1 кг күрүч 15 сом 50 тыйн,
10 кг күрүч 155 сом.

Тегеректөөдө … 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;

0,5 дм ·0,3 дм =5 см · 3 см =15 см^2=0,15 дм^2;

4,2 см·2,8 см=42 мм · 28 мм=1176 мм^2 =11,76 см^2;
Эки ондук бөлчөктү көбөйтүш үчүн…

· {10, 100, 1000, …} , $\longrightarrow$
· {0,1·0,01 0,001 } , $\longleftarrow$

1 % $\longrightarrow \frac{1}{100}$ сандын жүздөн бир бөлүгү;

1тыйын –1 сомдун 1% ти;
1 см – метрдин 1% ти;
1 ар – гектардын (га) 1% ти болот.

2,88:0,8=28,8:8=3,6;

4,5:0,125=4500:125=36;

0,7·0,3=0,21;

$\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{21}{100}=0{,}21;\qquad \frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}=\frac{b\cdot c}{a^2};$

Санды ондук бөлчөккө бөлүү үчүн…

Масштаб деген аймактын узундугунун кагаздагы анын узундугунан канча эсе чоң экендигин билдирет: 1:1000.000

1 см ↔1.000.000см; 1км ↔1000см; масштабда!

1см↔10 км 1см ↔ 10м.

$$\frac{1}{1000};\qquad \begin{cases}1км \leftrightarrow 1000м,\\ 1м \leftrightarrow 100см,\\ 1дм \leftrightarrow 10см.\end{cases}\qquad \frac{1}{2}м.\cdot\frac{1}{3}м.=\frac{1}{6}м^2;\quad \frac{3}{8}\cdot 5=\frac{15}{8};$$

$$\frac{3}{8}см.\cdot 5=\frac{15}{8}см.$$

Үчүнчү тапшырма: Өз алдыңарча төмөндөгү математикалык түшүнүктөрдү “чыйралтып” жазып чыккыла: бурч, бурчтун биссектрисасы, жайылган жана тик бурчтар, тар жана кең бурчтар, кайчылаш жана вертикалдык бурчтар, перпендикуляр түз сызыктар.

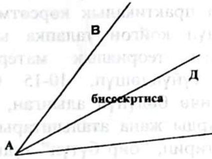
Тапшырмага түшүндүрмө: Бүт баары геометриялык түшүнүктөр (бул жалпы белгилери). Алардын өзгөчө айырмалуу белгилерин табуу үчүн схемаларды, чиймелерди жана түйүндүү - таяныч белгилерди түзүп чыгабыз.

∠BAC=∠A бүктөсө дал …

∠BAD=∠DAC.

а) Тик бурчтан чоң бурчтар … д.а.

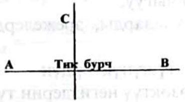
б) Тик бурчтан кичине бурчтар … д.а.

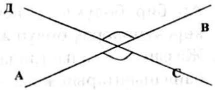


Жайылган бурч

Жайылган бурчтун жарымы тик бурч деп аталат.

саттар… $1^{\circ} \rightarrow \frac{1}{180}$ бөлүгү, жыйылган бурчтун жарымы тик д.а, ал эми $1^{0} = 60^{'}$; $1^{'} = 60^{"}$ секунд.





Вертикалдык бурчтар

Ошентип, "тоголоктонуп" түзүлгөн жана өзүнчө маанилүү өзөккө ээ болгон, мурда ар кандай сапатта жана деңгээлде кабылданган математикалык билимдерди чыгармачылык менен өз алдынча "чыйралтуу" үчүн, төмөндөгүдөй дидактикалык туюмдуу- процедураларды аткаруу керек экен:

1. Алгач бүт теориялык материалды жалпы жолунан ойлонуу менен окуп чыгуу зарыл;
2. Жаттоонун кереги жок. Зордуктап эсте сактап калууга дагы умтулган жарабайт!. Бирок, математиканы өздөштүрүүдө негизги-өзөктүү жана маанилүү түшүнүктөрдү ойлонуу менен окуган натыйжалуу болот;
3. Ар бир бөлүмдөн (китептин мазмунун карап), керектүү баяндамаларды бөлүп алып, өзгөчө баян эткен жерлерин жана терминдерин бөлүп жазып алуу пайдалуу;
4. Аныктамаларды, теоремаларды жана далилдөөлөрдү жазып албаш керек. Айрым гана теоремаларды, касиеттерди жана

баяндоочу өзгөчө түшүнүктөрдү өзүнчө бөлүп жазып алган жакшы;

5. Жазып алганда терминдерди жана аталыштарын гана алган кажет. Ал эми эрежелерди жана практикалык көрсөтмөлөрдү сөзсүз түрдө жазып алып, бөлүп койгон талапка ылайык. Акырында бир чоң китептеги теориялык материалдар "тоголоктонуп", кыскартылып түйүндөшүп, 10-15 беттеги дептерге эле түзүлүп калат. Өзүнчө бөлүнүп алынган, жекече жазылган түшүнүктөрдү, схемаларды жана аталыштары менен эрежелерди "чыйралтып" бириктирип, "бир бүтүн" түшүнүккө алып келүү дагы чыгармачыл жана азаптуу акыл-ой аракети жана акыл эмгегин талап кылат. Бул көрсөтүлгөндөрдү мүмкүн болушунча кыска убакыт өлчөмүндө аткаруу зарыл. Мына ошол максатта биз, тоголок-түйүндүү негизде берилген окуу-программалык түшүнүктөрдү жандырып-чыйралтуунун төмөнкүдөй кыска убакыттын өлчөмдүк негиздеги дидактикалык ыкмасын белгилей алаар элек:

1. Окуу китебин жалпы жонунан окуп чыгуу;
2. Ар бир бөлүмдөгү негизги формулаларды, эрежелерди жана көрсөтмөлөрдү бөлүп жазып алуу;
3. Жазып алынгандардагы түшүнүктөрдүн жалпы байланыштарын жана логикалык өзөктүү негиздерин түзүү;
4. Кайталоочу-матрицаларды, схемаларды жана таблицаларды, таяныч-формулаларды өз алдынча түзүү;
5. Эске салуу боюнча бул түшүнүктөрдү "чыйралта" билүү.

Ар бир жаш адам буларды аткаруу үчүн индивидуалдык убакыт өлчөмүн керектейт. Мисалы, жалпы берилген "квадраттык тендемелер", «Чыныгы сандын модулу» жана «Рационалдык сандар» – деген бөлүмдөрдүн "тоголоктонуп" берилген маанилүү түшүнүктөрүнүн "чыйралтуу" схемасын көргөзөлү.

1. Квадраттык тендемелер.

$$\left.\begin{aligned} &ax^2 = 0, \\ &ax^2 + bx = 0, \\ &ax^2 + c = 0. \end{aligned}\right\} \quad \text{толук эмес!}$$

$x^2 + bx + q = 0$ – келтирилген квадраттык тендеме;

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0;$$

$$\sqrt{(x + \frac{p}{2})^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ толук квадраттык тендеме.

Эки жагын тең *4a* га көбөйтөбүз:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 - b^2 + 4ac = 0$$

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

$bx^2 + cx + d = 0$ толук квадраттык тендеме.

Эки жагын тең *4b* га көбөйтөбүз.

$$4b^2x^2 + 4cbx + 4bd = 0$$

$$4b^2x^2 + 4cbx + c^2 - c^2 + 4bd = 0$$

$$\sqrt{(2bx + c)^2} = \sqrt{c^2 - 4bd},$$

$$x_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4bd}}{2b},$$

$$x_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{D}}{2b}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Эгерде $ax^2 + bx + c = 0$ квадраттык тендемесинде $b = 2k$ болсо,

анда $ax^2 + 2kx + c = 0$ болуп

$$x_{1,2} = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a},$$

деген эки тамыры бар болот.

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \\ x_2 &= -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ x_1 + x_2 &= p, \\ x_1 \cdot x_2 &= q. \end{aligned}\right\}$$

Виеттин теоремасы

$$x_1 \cdot x_2 = (-\frac{p}{2})^2 - (\sqrt{\frac{p^2}{4} - q})^2,$$

$$x_1 \cdot x_2 = (\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q.$$

Мисалдарды өз алдыңарча келтиргиле.

Квадраттык үч мүчө болот:

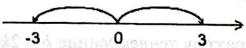
$$y = x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - xx_1 - xx_2 + x_1 x_2 =$$

$$= x_1(x - x_1) - x_2(x - x_1) == (x - x_1) \cdot (x - x_2);$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) = a(x - x_1)(x - x_2)\ .$$

2. ***Чыныгы сандын модулу.***

Карама-каршы *a; -a* белгидеги сандар: –20, -(-20) N – натуралдык сандар, аларга тескери белгидегилер жана 0 саны: $Z = \{...-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$-бүтүн сандар



$|-6| = 6$

модуль: $|7| = 7$

$|0| = 0; \; |-m| = m$

$$|a| = \begin{cases} a, & \textit{эгерде } a > 0 \quad \textit{болсо}, \\ -a, & \textit{эгерде } a < 0 \quad \textit{болсо}, \\ 0, & \textit{эгерде } a = 0 \quad \textit{болсо}. \end{cases}$$

Мисалы: $|+5| = 5$; $|-5| = 5$; $|-5,4| = 5,4$.

3. *Рационалдык сандар.*

$\frac{m}{n}$ - $(m \in Z, \quad n \in N)$ түрүндөгү сандар, б.а. оң бүтүн жана бөлчөк, терс бүтүн жана бөлчөк, ошондой эле 0 сандары рационалдык сандар д.а. жана рационалдык сандар көптүгү Q менен белгиленет.

1. Бүтүн сандар: $7 = \frac{21}{3}$; $\frac{0}{14}$; $\frac{40}{5} = 8$.

2. Жөнөкөй бөлчөктөр: $2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$; $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

3. Ондук бөлчөктөр: $0{,}17 = \frac{17}{100}$

4. Мезгилдүү бөлчөктөр:

   а) таза мезгилдүү бөлчөк: $0{,}232323... = 0,(23) = \frac{23}{99}$;

   б) аралаш мезгилдүү бөлчөк:

$$0{,}5818181... = 0{,}5(81) = \frac{581-5}{990} = \frac{576}{990} = \frac{288}{495}\ .$$

5. $\frac{0}{a} = 0$: $\frac{m}{0} - ?$ $\quad \frac{0}{0} - ?$ формулалары же нөлдү, же аныксыздыкты берет.

Мына ушуга окшогон «тоголоктонуп өрүлүп» - түзүлгөн математикалык билимдерди окуучу же студент өз алдынча чыйралта алуусу зарыл. Ошондо гана кабылданган математикалык билимдер жалпы өзөккө ээ болуп системалуу негизде жана маанилүү маңыздагы сапатта боло алат.

Эми, биз төмөндө элементардык математиканын негизги орчундуу түшүнүктөрүн ар бир параграфта «өзөктүү - тоголоктолгон» таризде сүйлөмдөр жана формулалар менен беребиз. Андагы математикалык түшүнүктөрдү ар бир окуучу же студент мектепте калыпталган билимдеринин өзөктөрүнүн негизинде, ал билимдердин жекече жаш адамдын эс тутумунда (эсинде) калыптанган дэңгээлине жана сапатына жараша «жандырып чыйралтууну» (жогоруда биз көрсөткөндөй мааниде) өз алдыларынча аткарууну сунуш кылабыз. Эгерде окуучу же студент математикалык тиешелүү билимдерди кайсы бир параграф боюнча өз алдынча «чыйралта» албаса, анда орто мектептин окуучулары үчүн чыгарылган математика боюнча тиешелүү китептерди, адабияттарды кайталап чыгууларын суранаар элек. Дидактиалык ар түркүн пардигмаларды дагы колдонууну унутпагыла.

III БАП. АЛГЕБРА ЖАНА АНАЛИЗДИН БАШТАЛЫШЫ

§1. Алгебранын негизги формулалары

Алгебранын негизги мыйзамдары (формула түрүндө)

Каалагандай a, b - чыныгы сандары үчүн төмөнкү барабардыктар туура:

1. $a+b=b+a$ (кошуунун орун алмаштыруу эрежеси)
2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (кошуунун топтоштуруу эрежеси)
3. $a+0=a$
4. $a+(-a)=0;$
5. $a\cdot b=b\cdot a$ (көбөйтүүнүн орун алмаштыруу эрежеси)
6. $a\cdot(b\cdot c)=(b\cdot a)\cdot c$ (көбөйтүүнүн топтоштуруу эрежеси)
7. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ (көбөйтүүнүн кошууга карата бөлүштүрүү эрежеси)
8. $a\cdot 1=a$

9 $a\cdot\frac{1}{a}=1$ $(a\neq 0)$.

Калдыгы менен бөлүү

Эгерде m,n,p,r - натуралдык сандар (мында m-бөлүнүүчү, n-бөлүүчү, p-тийинди жана r-калдык (r<n)) болсо, анда $m=np+r$, $r=m-np$ деп каалаган санды жазууга болот.

Чыныгы сандын модулу жана анын касиети

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ эгер } a>0 \text{ болсо,} \\ -a, \text{ эгер } a<0 \text{ болсо,} \\ 0, \text{ эгер } a=0 \text{ болсо.} \end{cases}$$

Модулдун касиеттери:

1⁰. $|a| \geq 0.$

2⁰. $|a| = |-a|.$

3⁰. $|a| = |b| \Rightarrow a = \pm b.$

4⁰. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|.$

5⁰. $|a|^2 = a^2.$

6⁰. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ b \neq 0.$

7⁰. $|a \pm b| \leq |a| + |b|.$

8⁰. $|x| < c \quad (c > 0) \Rightarrow -c < x < c.$

9⁰. $|x| > c \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x > c, \\ x < -c. \end{array}\right.$

Жөнөкөй барабарсыздыктар

1. $|a + b| \leq |a| + |b|,$
2. $|a - b| \geq \big||a| - |b|\big|,$
3. $a^2 + b^2 \geq 2ab,$
4. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ (*a* жана *b* - бир белгидеги сандар),
5. $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$.

Оң сандын стандарттык түрүнүн жазылышы

$a = a_1 \cdot 10^n$ (ондук эсептөө системада) мында $1 \leq a_1 < 10$, n-бүтүн сан (*a* санынын тартиби)

Каталыктар

Эгер $a - \alpha$ санынын жакындатылган мааниси болсо, анда $|\alpha - a|$ абсолюттук каталык, ал эми $\frac{|\alpha - a|}{|a|} \cdot 100\%$-салыштырма каталык деп аталат.

Кыскача көбөйтүүнүн формулары

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
5. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$
8. $a^4 - b^4 = \left(a^2 + b^2\right)\cdot\left(a^2 - b^2\right)$

Арифметикалык тамыр жана анын касиеттери

Эгерде $a \geq 0$ болсо, анда $\sqrt[n]{a} = x : 1)\ x \geq 0,\ 2)\ x^{\mathrm{n}} = a$ экендигин билдирет (арифметикалык тамырдын аныктамасы).

Эгерде $a \geq 0$, $b \geq 0$, $b \neq 0$ болсо, анда төмөнкү касиеттер орун алат:

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
3. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$
4. $\sqrt[nm]{a^{\mathrm{km}}} = \sqrt[n]{a^k}$
5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
6. $\sqrt{a^2} = |a|$
7. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$

8. $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$

9. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = (\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})$

10. $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} = (\sqrt[8]{a} - \sqrt[8]{b})(\sqrt[8]{a} + \sqrt[8]{b})$

Рационалдык көрсөткүчтүү даражанын касиеттери

1. $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a, \quad a^1 = a$ (натуралдык көрсөткүчтүү даражанын аныктамасы) n жолу.

2. $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, мында $a \geq 0$ (оң бөлчөк көрсөткүчтүү даражанын аныктамасы),

3. $a^0 = 1$, мында $a \neq 0$ (көрсөткүчү нөл болгон даражанын аныктамасы)

4. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$, мында $a \geq 0$ (терс рационалдык көрсөткүчтүү даражанын аныктамасы).

5. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$

6. $a^{r_1} : a^{r_2} = a^{r_1 - r_2}$

7. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$

8. $(a \ \cdot a)^r = a^r \ \cdot a^r$

9. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

10. $a^1 = a$

Бөлчөктүн бөлүмүн иррационалдуулуктан куткаруу

1. $\dfrac{b}{\sqrt[n]{a}} = \dfrac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}} = \dfrac{b\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a},$

2. $\frac{z}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, \frac{z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}, \frac{z}{x-\sqrt{y}}, \frac{z}{x+\sqrt{y}}$ -

Бөлчектөрүндө алымын жана бөлүмүн бөлүмүнө тутамдаш болгон туюнтмага көбөйтүшөт (мында $(\sqrt{x}-\sqrt{y})$ туюнтмасына $(\sqrt{x}+\sqrt{y})$ - туюнтмасы тутамдаш жана $x-\sqrt{y}$ туюнтмасына $x+\sqrt{y}$ тутумдаш болот ж.б.у.с.) Ошондой эле $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, $(\sqrt{a})^2=a$ экендигин эске алышат.

§2. Алгебралык теңдемелерди чыгаруу

1. Сызыктуу теңдеменин чыгарылышы

$$a\cdot x=b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{b}{a},\ \text{эгер}\ a\neq 0\ \text{болсо}, \\ x\ \text{- ар кандай сан, эгер}\ a=0,\ b=0, \\ x\in\varnothing\ \ \text{эгер}\ a=0,\ b\neq 0\ \text{болсо}, \end{array}\right.$$

2. Квадраттык теңдемени чыгаруу

Толук квадраттык теңдемени чыгаруу:

$ax^2+bx+c=0,$

эгерде $D>0$ болсо, анда $x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a};$

эгерде $D=0$ болсо, анда $x_{1,2}=-\frac{b}{2a}$ болот;

$x\in\varnothing$, эгерде $D<0$ болсо.

Келтирилген квадраттык теңдемени чыгаруу

$x^2+px+qx=0$, $\quad D=(\frac{p}{2})^2-q$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$, эгер $D > 0$ болсо,

$x_{1,2} = -\frac{p}{2}$, эгер $D = 0$ болсо,

$x \in \varnothing$ эгер $D > 0$ болсо.

Жекече учурлар:

1. $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + \mathrm{b} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

2. $x^2 - m = 0, \quad m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 = m \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{m}$

3. $x^2 + m = 0, \quad m > 0 \Leftrightarrow x^2 = -m \Rightarrow x \in \varnothing.$

Виеттин теоремасы:

1. *(келтирилген квадраттык теңдеме үчүн)*

Эгер x_1 жана x_2-келтирилген квадраттык теңдеменин $x^2 + px + q = 0$ тамырлары болсо, анда $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$ барабардыктары аткарылат.

2. *(толук $ax^2 + bx + c = 0$ квадраттык теңдеме үчүн)*

Эгер x_1 жана x_2- толук квадраттык тендеменин $(ax^2 + bx + c = 0)$ тамырлары болсо, анда $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ барабардыктары аткарылат.

Квадраттык үч мүчөнү көбөйтүүчүлөргө ажыратуу

$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2);$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$

Мисалдарды өз алдыңарча келтиргиле.

Квадраттык теңдемеге келтирилүүчү теңдемелер:

Мектептин математика курсунда квадраттык теңдемеге көп теңдемелер келтирилет. Булар алгебралык, логарифмалык, көрсөткүчтүү, тригонометриялык ж.б. теңдемелер. Ушундай теңдемелерди квадраттык теңдемеге келтирүү үчүн ар түрдүү ордуна коюларды же кандайдыр бир өзгөртүп түзүүлөрдү колдонушат.

Мисалдарды келтиребиз:

1. Биквадраттык тендеме.

$$ax^4+bx^2+c=0, \qquad (1)$$

Бул тендеме $x^2=y$ ордуна коюусунун жардамында квадраттык тендемеге келтирилет.

$$(1)\Rightarrow \quad ay^2+by+c=0 \qquad (2)$$

Эгерде y_k $(k=1,2)$- (2) тендемесинин тамырлары болушса, анда $y_k\ge 0$ үчүн $x^2=y_k$ болот.

Эгерде $y_k<0$, болсо анда $x\in\varnothing$.

2. $ax^{2n}+bx^n+c=0$ теңдемеси үчүн $x^n=y$ ордуна коюусун пайдаланабыз.
3. $a\sin^2 x+b\sin x+c=0$ теңдемеси үчүн $\sin x=y$ ордуна коюусун пайдаланабыз.
4. $a\sqrt{x}+b\sqrt[4]{x}+c=0$ тендемеси учун $\sqrt[4]{x}=y$ $(y\ge 0)$ ордуна коюусун пайдаланабыз ж.б.у.с.

3. *Эки мүчөсү бар ($x^n-a=0$) теңдемелерди чыгаруу*

$$x^n=a\Rightarrow\left[\begin{array}{lll} x=\sqrt[n]{a}\ , & n \quad так \quad болгондо & (a\ge 0), \\ x=\pm\sqrt[n]{a}, & n \quad жуп \quad болгондо & (a\ge 0). \end{array}\right.$$

Мисалдар:

1. $x^3=27\Rightarrow x=3.$
2. $x^4=16\Rightarrow x_{1,2}=\pm 2.$

4. *Иррационалдык тендемелерди чыгаруу*

Жок дегенде бир мүчөсү белгисизге карата иррационалдуу болгон (б.а. тамырды кармаган) алгебралык теңдемени иррационалдык теңдеме дейбиз.

Элементардык матеметикада чыныгы чыгарылыштарын гана издеп табышат.

Иррационалдык теңдемени чыгарууга киришүүнүн алдында анын аныкталуу областын табуу максатка ылайыктуу. Анткени, берилген теңдеме чыныгы сандардын көптүгүндө аныкталбаган учурлар да болуп калышы ыктымал.

Ар кандай эле иррационалдык теңдемени ордуна коюу же арифметикалык өзгөртүп түзүү менен, ошондой эле теңдеменин эки жагын тең күчтүү болбогон бүтүн алгебралык теңдемеге өзгөртүп түзүлүшү мүмкүн. Ошон үчүн өзгөртүп түзүүдөн алынган тендеменин чыгарылышынын берилген теңдеменин аныкталуу областында жатаарын сөзсүз текшерүү керек.

Мисалдарды карайбыз:

1. $\sqrt[n]{ax+b}=c \quad \Rightarrow \quad ax+b=c^n \Rightarrow x=(c^n-b):a$

2. $\sqrt[3]{x}=2;\ x^3=8:$

3. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$ теңдемесинде болсо $\sqrt[3]{x}=y$ ордуна коюусун пайдаланып $y+2y^2=3, \quad \Rightarrow \quad y_1=1,\ y_2=-\dfrac{3}{2}$ маанилерди табабыз дагы, ал эми: 1) $\sqrt[3]{x}=1 \Rightarrow x_1=1,$

2) $\sqrt[3]{x}=-\dfrac{3}{2} \Rightarrow x_2=(-\dfrac{3}{2})^3=-\dfrac{27}{8}$ деген жооптор келип чыгат.

4. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ (1)

Аныкталуу областы: $\left.\begin{matrix}3x+7\geq 0\\ x+1\geq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\geq -1$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x+7}=2+\sqrt{x+1}$

Берилген тендеменин эки жагын тең квадратка көтөрүп,

$(\sqrt{3x+7})^2=(2+\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow x+1=2\sqrt{x+1} \Rightarrow (x+1)^2=(2\sqrt{x+1})^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=3.$

Табылган бул эки тамыр аныкталуу областка таандык жана (1) тендемени канаатандырат.

Ар түрдүү теңдемелерди чыгаруу үчүн эскертүүлөр:

1. $f_1(x), f_2(x)$ тер жашаган областка төмөнкү ырастоолор туура:

1) $f_1(x)\cdot f_2(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \end{cases}$

2) $(f(x))^n=0 \Leftrightarrow f(x)=0$

3) Аныкталуу областта:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)\neq 0 \end{cases}$$

§3. Алгебралык барабарсыздыктарды чыгаруу

Барабарсыздыктардын касиеттери

$$a>b \Rightarrow \begin{cases} a-b>0, \\ a+m>b+m \\ a-m>b-m \\ \left.\begin{matrix} a\cdot m>b\cdot m \\ a:m>b:m \end{matrix}\right\} m>0 \text{ болгондо} \\ \left.\begin{matrix} a\cdot m<b\cdot m \\ a:m<b:m \end{matrix}\right\} m<0 \text{ болгон} \end{cases}$$

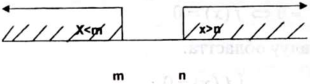
Мисалдарды келтиргиле.

1. Сызыктуу барабарсыздыктарды чыгаруу

1. $ax>b \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x>\dfrac{b}{a}, & \text{эгерде } a>0 \text{ болсо,} \\ x<\dfrac{b}{a}, & \text{эгерде } a<0 \text{ болсо,} \end{array}\right.$

2. $$ax < b \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x < \dfrac{b}{a}, & \text{эгер} \quad a > 0 \ \text{болсо,} \\ x > \dfrac{b}{a}, & \text{эгер} \quad a < 0 \ \text{болсо.} \end{array}\right.$$

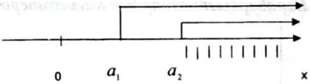
Сызыктуу барабарсыздыктардын геометриялык сүрөттөлүшү



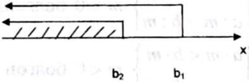
Мисалдарды өз алдыңарча келтиргиле.

Эки сызыктуу барабарсыздыктар системасын чыгаруу

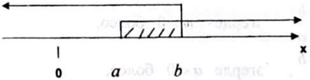
1. $$\begin{cases} x > a_1 \\ x > a_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x > max\{a_1, a_2\} = a_2$$



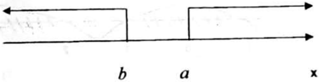
2. $$\begin{cases} x > b_1 \\ x > b_2 \end{cases} \Rightarrow \quad x < min\{b_1, b_2\} = b_2$$



3. $$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \Rightarrow \quad a < x < b$$



4. $\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing,\ a > b$



Эскертүү. Биз жогоруда караган мисалдарда чекиттердин өздөрү $m, n, a_1, a_2, b_1, b_2, a, b$ каралган областарга кирбейт. Себеби «$<$», «$>$» белгилери каралган. Эгерде барабарсыздыктарда «$\le$» жана «$\ge$» белгилери каралса, анда каралган чекиттердин өздөрү да көрсөтүлгөн областарга киришет.

Ар бир барабарсыздыктарга мисалдарды келтиргиле.

Ар түрдүү барабарсыздыктарды чыгаруу

1. Аныкталуу областтарды эске алуу менен чыгарылуучу барабарсыздыктар сызыктуу барабарсыздыктардын системасына келтирилет.

Мисалы:

$$(x-1)(x-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1>0, \\ x-3<0, \end{cases} \Leftrightarrow \ 1<x<3, \\ \begin{cases} x-1<0, \\ x-3>0, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in \varnothing \end{array}\right.$$

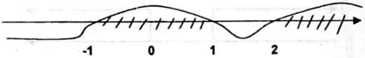
Жообу: $x \in (1;3)$.

2. Барабарсыздыктарды интервалдар ыкмасы менен да чыгарууга болот. Бул ыкмада берилген барабарсыздыктын аныкталуу областы $f_k(x) = 0$ болгондой x_k чекиттери менен интервалдарга бөлүнөт. Алынган бардык интервалдардын ар биринде $f_k(x)$ функциясынын белгиси жана ошондой эле кайсы интервалдарда берилген барабарсыздыктын аткарылышы аныкталат.

Мисалы: $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1} > 0; \quad f(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1}$

Аныкталуу областы:

$x \ne 1, \quad f(x) = 0 \ \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$



Жообу: $x \in]-1;1[\cup]2;\infty[$.

Эскертүү: $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$ түрүндөгү квадраттык барабарсыздыктарды чыгарууда көп мүчөлөргө ажыратууну колдонуп, б.а. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ жогорудагы жолдор менен чыгарууга болот.

§4. Логарифмдер

$\log_a b = x$ жазуусу $a^x = b$ экендигин билдирет: мында $a > 0$, $a \neq 0$ (негизи a болгон логарифмдин аныктамасы).

$\lg b = \log_{10} b$ үчүн кыскартылган жазылыш (ондук логарифм).

Мисалы:

$$\lg 1 = 0, \quad \lg 10 = 1, \quad \lg 100 = 2, \quad \lg 1000 = 3, \ldots, \lg 10^n = n,$$

$$\lg 0{,}1 = -1, \quad \lg 0{,}01 = -2, \quad \lg 10^{-n} = -n.$$

$\ln b = \log_e b$ үчүн кыскартылган жазылыш (натуралдык логарифм), *e=2,7182818284590…*,

Логарифмдин касиеттери:

1. $a^{\log_a b} = b$
2. $10^{\lg b} = b$
3. $e^{\ln b} = b$
4. $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$
5. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
6. $\log_a b^n = n \log_a b$

7. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ - (жаңы негизге өтүүнүн формуласы)

8. $\log_a b = \log_{a^k} b^k$ $(k \neq 0)$

9. $\log_a 1 = 0$

10. $\log_a a = 1$

11. $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k}\log_a b$.

Мисалдар. $2^{\log_2 5} = 5$; $3^{\log_3 4} = 4$; $10^{\lg 5} = 5$; $e^{\ln 8} = 8$; $\dfrac{1}{6}^{\log_{\frac{1}{6}} 9} = 9$;

Өз алдыңарча бир нече мисалдарды келтиргиле.

§5. Жөнөкөй көрсөткүчтүү, логарифмалык тендемелерди жана барабарсыздыктарды чыгаруудагы негизги формулалар

Жөнөкөй көрсөткүчтүү теңдемелерди жана барабарсыздыктарды чыгарууда төмөнкү барабардыктар колдонулат:

1. $a^u = a^v \Leftrightarrow u = v$
2. $a^u = 1 \Leftrightarrow u = 0$
3. $a^u = b \Leftrightarrow u = \log_a b$
4. $a^u > a^v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u > v, & a > 1 \ \textit{болгондо}, \\ u < v, & 0 < a < 1 \ \textit{болгондо}. \end{array}\right.$
5. $a^u < a^v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u < v, & a > 1 \ \textit{болгондо}, \\ u > v, & 0 < a < 1 \ \textit{болгондо}. \end{array}\right.$

Жөнөкөй логарифмдик тендемелерди жана барабарсыздыктарды чыгарууда төмөнкү формулаларды колдоно билүү зарыл.

1. $\log_a u = \log_a v, \Rightarrow u = v, \quad (u > 0, v > 0)$

2. $\log_a u = b \Rightarrow u = a^b, \quad (u > 0)$

3. $\log_u a = b \Rightarrow u^b = a, \quad (u > 0, u \neq 1)$

4. $$\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u > v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \quad a > 1 \quad \textit{болгондо}$$

5. $$\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u < v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \quad 0 < a < 1 \quad \textit{болгондо}$$

6. $$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u < v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \quad a > 1 \quad \textit{болгондо}$$

7. $$\log_a u < \log_a v \Leftrightarrow \begin{cases} u > v \\ u > 0 \\ v > 0 \end{cases} \quad 0 < a < 1 \quad \textit{болгондо}$$

Ар бир учурга өз алдыңарча мисалдарды келтиргиле.

§6. Арифметикалык жана геометриялык прогрессиялар

Арифметикалык прогрессия:

1. $a_{n+1} = a_n + d$ (арифметикалык прогрессиянын аныктамасы)

2. $a_n = a_1 + d(n-1)$ (n-мүчөсүнүн формуласы, мында a_1 биринчи мүчөсү, a_n - n-чи мүчөсү, d - айырмасы)

3. $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$ (мүнөздүк касиети)

4. $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$ (биринчи n мүчөлөрүнүн суммасынын формуласы).

Геометриялык прогрессия:

1. $b_{n+1} = b_n \cdot q,\quad b_1 \neq 0,\quad q \neq 0$ (геометриялык прогрессиянын аныктамасы, мында b_1 - биринчи мүчөсү, b_n- n - мүчөсү, q - тийиндиси),

2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ (n- мүчөсүнүн формуласы),

3. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ (мүнөздүк касиети),

4. $S_n = \dfrac{b_1 q^n - b_1}{q-1} = \dfrac{b_1(q^n-1)}{q-1}$ (биринчи n- мүчөлөрүнүн суммасынын формуласы)

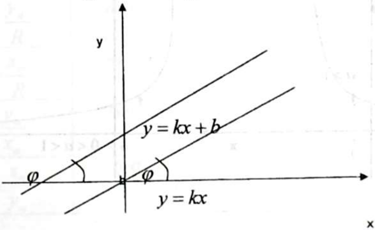
$S = \dfrac{b_1}{1-q}\quad |q| < 1$ (болгондо чексиз кемүүчү геометриялык прогрессиянын суммасынын формуласы).

§7. Элементардык функциялар жана алардын графиктери

1. $y = kx + b$ **-** ***сызыктуу функциясы.***

Мында $k = tg\varphi$ – бурчтук коэффициент, φ бурчу $y = kx + b$ сызыктуу функциясы менен Ох огунун ортосундагы бурчту көрсөтөт.

Сызыктуу функциянын графигин тургузуу үчүн аныкталуу областын аныктоо менен: $D(y) =]-\infty; \infty[$, ал графиктин эки чекитин эле табуу жетиштүү: $x = 0$ болгондо *(0; b)* чекитин жана *y=0* болгондо, $x = -\dfrac{b}{k}$ *б.а.* $(-\dfrac{b}{k}, 0)$ чекитин:

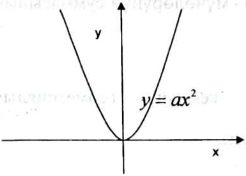


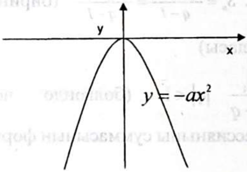
2. $y = ax^2 + bx + c$ – *квадраттык функциянын графиги*

Квадраттык функциянын графиги-парабола болот. Параболанын симметрия огу ОУ огуна параллель болуп, анын чокусу $B(-\frac{b}{2a}; c-\frac{b^2}{4a})$ чекитинде жатат.

Параболанын тармагы $a<0$ болгондо «төмөн» карайт, $a>0$ болгондо «жогору» карайт.

Жекече учурлар:

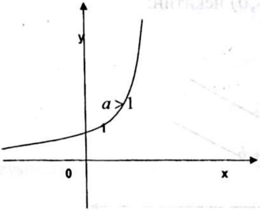


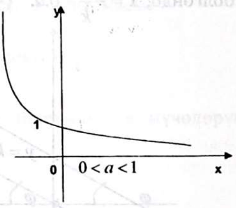


3. $y = a^x \quad (a>0, \quad a \neq 1)$ – *көрсөткүчтүү функция*

Касиеттери:

1. $D(y) =]-\infty; \infty[$
2. $a^x > 0, \quad x \in R$;
3. $a^0 = 1$
4. $a>0$ болгондо $y = a^x$ функциясы өсүүчү болот.
5. $0<a<1$ болгондо $y = a^x$ функциясы кемүүчү болот.





Мисалдарды өз алдыңарча келтиргиле

4. *Логарифмалык функция* $y=\log_a x$

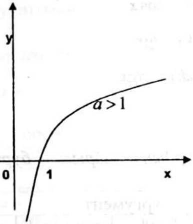
Касиеттери:

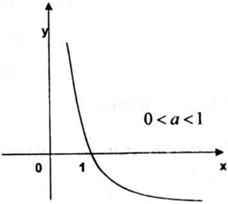
1. $D(y)=]0;\infty[$

2. $a>1$ болгондо $y=\log_a x$ функциясы өсөт.

3. $0<a<1$ болгондо $y=\log_a x$ функциясы кемийт.

$y=\log_a x$ функциясынын графиги төмөндө берилген.

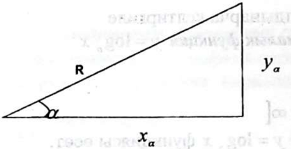




5. *Тригонометриялык функциялар*

1. *Тригонометриялык функциялардын аныктамасы*

Аныктамасы	Функция	Чейректердеги белгилери				Жуптугу, тактыгы
		I	II	III	IV	
$\sin\alpha=\dfrac{y_\alpha}{R}$	$\sin\alpha$	+	+	-	-	$\sin(-x)=-\sin x$ так
$\cos\alpha=\dfrac{x_\alpha}{R}$	$\cos\alpha$	+	-	-	+	$\cos(-x)=\cos x$ жуп
$tg\alpha=\dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$	$tg\alpha$	+	-	+	-	$tg(-x)=-tgx$ так
$ctg\alpha=\dfrac{x_\alpha}{y_\alpha}$	$ctg\alpha$	+	-	+	-	$ctg(-x)=-ctgx$ так



2. Мезгилдуулугу

1. $\sin(x+2\pi k)=\sin x$
2. $\cos(x+2\pi k)=\cos x$
3. $tg(x+\pi k)=tgx$
4. $ctg(x+\pi k)=ctgx$

мында k - бүтүн сан.

3. *Тригонометриялык функциялардын айрым бурчтардагы маанилери*

№	Функциялар	Аргумент							
		0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
1	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
2	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
3	$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
4	$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

4. Келтируунун формулалары:

Функ	Аргумент							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\beta$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$
$ctg\beta$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$

Жыйынтык: Эгерде келтирүүнүн формуласы 180 жана 360 (π *же* 2π) бурчтарын камтыса, анда аталган функция өзгөрүүсүз калат, ал эми 90^0 же 270^0 ($\frac{\pi}{2}$ *же* $\frac{3\pi}{2}$) бурчтарын кармаса, анда аталган функция өзгөрүп кетет, б. а. $\sin\alpha \to \cos\alpha$, $tg\alpha \to ctg\alpha$, $\sin\alpha \to \cos\alpha$, жана тескерисинче.

Келтирүүнүн формуласынын оң жагындагы туюнтманыны белгисин коюу үчүн (+ же -) α бурчун тар бурч деп эсептеп сол жактагы туюнтманын белгисин аныктоо жетиштүү. Ушул белги оң жактагы туюнтманын белгиси болот.

5. *Негизги тригонометриялык теңдештиктер*

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$
2. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$
3. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$
4. $tg\alpha = \dfrac{1}{ctg\,\alpha},$
5. $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha},$
6. $1 + ctg^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha},$

6. *Бурчтардын суммасынын жана айырмасынын тригонометриялык функциялары*

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
3. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.
4. $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\, cos\beta - sin\alpha\, sin\beta$.
5. $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$.
6. $tg(\alpha - \beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha\, tg\beta}$.

7. *Эселүү бурчтун тригонометриялык функциялары*

1. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$,

5. $\sin\alpha = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

2. $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ 6. $\cos\alpha = \cos^2 \dfrac{\alpha}{2} - \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

3. $tg\, 2\alpha = \dfrac{2\, tg\alpha}{1 - tg^2 \alpha}$ 7. $\sin 8\alpha = 2\sin 4\alpha \cdot \cos 4x$.

4. $ctg\, 2\alpha = \dfrac{ctg^2 \alpha - 1}{2\, ctg\alpha}$ 8. $\cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha$.

8. Жарым бурчтун тригонометриялык фунциялары

1. $Sin^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$ 2. $\cos^2 \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

3. $\cos\alpha = \dfrac{1 - tg^2 \dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \dfrac{\alpha}{2}}$

4. $tg \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$

5. $\sin\alpha = \dfrac{2tg^2 \dfrac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \dfrac{\alpha}{2}}$ 6. $tg \dfrac{\alpha}{2} \cdot ctg \dfrac{\alpha}{2} = 1$.

9. Тригонометриялык функциялары суммасын көбөйтүндүгө өзгөртүүнүн формулалары

1. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

2. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

3. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

4. $tg\alpha + tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

5. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

6. $tg\alpha - tg\beta = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

10. Тригонометриялык фунциялардын көбөйтүндүсүн суммага өзгөртүүнүн формулалары

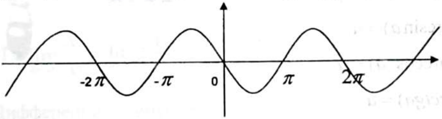
1. $\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

2. $\sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$

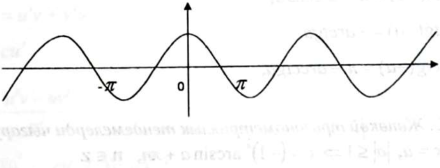
3. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

10. *Тригонометриялык фунциялардын графиги*

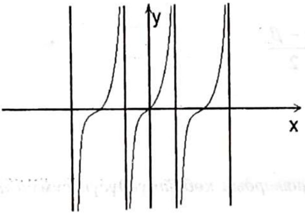
1. Синусоида



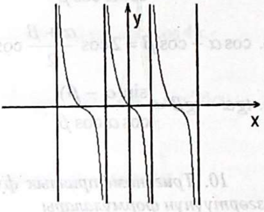
2. Косинусоида



3.Тангенсоида



4. Котангенсоида



11. *Тескери тригонометриялык фунциялар*

1. $\arcsin a = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = a, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2},\ |a| \le 1$

2. $\arccos a = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = a, \qquad 0 \le \alpha \le \pi,\ |a| \le 1$

3. $arctga = \alpha \Rightarrow tg\alpha = a, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2},$

4. $arcctga = \alpha \Rightarrow ctg\alpha = a, \qquad 0 \le \alpha \le \pi$

5. $\sin(\arcsin a) = a$

6. $\cos(\arccos\ a) = a$

7. $tg(arctga) = a$

8. $\arcsin(-a) = -\arcsin a,$

9. $\arccos(-a) = \pi - \arccos a,$

10. $arctg(-a) = -arctga,$

11. $arcctg(-a) = \pi - arcctga,$

12. *Жөнөкөй тригонометриялык тендемелерди чыгаруу*

1) $\sin x = a,\ |a| \le 1 \Rightarrow x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in z$

Жекече учурлар:

1. $\sin x = -1 \Rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\quad n \in z$

2. $\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi n;\quad n \in z$

3. $\sin x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\quad n \in z$

2) $\cos x = a,\ |a| \le 1 \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi n,\quad n \in z$

Жекече учурлар:

1. $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi n,\quad n \in z$

2. $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\quad n \in z$

3. $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi n;\quad n \in z$

3) $tgx = a$

$x = arctga + \pi n,\quad n \in z$

§8. Функциянын туундусу

$y' = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ туундунун аныктамасы.

I. Дифференцирлөөнүн эрежелери:

1. $(u+v)' = u' + v'$

2. $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

3. $(cu)' = cu'$

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

5. $\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Дифференцирлөөнүн формулалары:

1. $C' = 0$

2. $(kx+b)' = k,$

3. $(x^r)' = r \cdot x^{r-1},$

4. $(e^x)' = e^x,$

5. $(a^x)' = a^x \ln a,$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

8. $(\sin x)' = \cos x$

9. $(\cos x)' = -\sin x$

10. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

12. $(\arcsin x)' = (-\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

13. $(arctgx)' = (-arcctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$y = f(x)$функциянын графигине жаныманын тендемеси $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Мында $x = a$ жануу чекитинин абцисасы.

Туундунун колдонулушу

1. Функциянын өсүшүн жана кемиишин (монотондуулугун) изилдөө үчүн:

$$\left.\begin{matrix} f'(x) > 0, \\ x \in]a,b[\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)$$ функциясы $]a,b[$ интервалында өсөт.

$$\left.\begin{matrix} f''(x) < 0, \\ x \in]b,c[\end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x)$$ функциясы $]b,c[$ интервалында кемийт.

2. Функциянын экстремумун (min жана max) табуу үчүн:

$f'(x_k) = 0 \Rightarrow x_k$ - сыналуучу чекит болот.

Эгерде		анда $f(x)$ функциясы x_k чекитинде
$x < x_k$ үчүн	$x > x_k$ үчүн	
$f^{'}(x)$ - төмөнкүдөй белгилерге ээ болот:		
-	+	минумумга ээ
+	-	максимумга ээ
+	+	эстремумга ээ эмес
-	-	экстремумга ээ эмес

*3. $f(x)$ функциясынын $[a,\ b]$ кесиндисиндеги эн чоң – M жана эң кичине **m**-маанилерин табуу үчүн:*

Функциянын кесиндидеги бардык сыноочу чекиттериндеги жана кесиндинин учтарындагы маанилерин эсептеп, алардын ичинен эң чоңун жана эң кичинесин тандап алабыз.

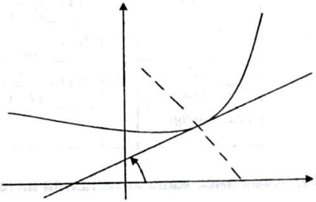
4. *Функциянын графигине жаныманын жана нормалдын теңдемеси*

Сүрөттө φ_1-жаныманын жантаюу бурчу.

$tg\varphi = f^{'}(x_0),\ y_0 = f(x_0)$

$y - y_0 = f^{'}(x_0)(x - x_0)$ - жаныманын тендемеси,

$y - y_0 = -\dfrac{1}{f^{'}(x_0)}(x - x_0)$ - нормалдын тендемеси.



§9. Баштапкы функциялар

Эгерде $F^{'}(x) = f(x)$ болсо, анда $F(x) - f(x)$ үчүн баштапкы функциясы болот (баштапкы функциянын аныктамасы).

1. Баштапкы функцияларды эсептөөнүн эрежелери.

Эгер $F^{'}(x) = f(x)$ үчүн баштапкы, ал эми $H(x) - h(x)$ үчүн баштапкы болсо, анда

$F(x) + H(x)$ функциясы $f(x) + h(x)$ үчүн баштапкы

$k \cdot F(x)$ функциясы $k \cdot f(x)$ үчүн баштапкы

$\frac{1}{k} F(kx + b)$ функциясы $f(kx + b)$ үчүн баштапкы болот.

2. Баштапкы функциялардын таблицасы (таблицасы ар бир функция үчүн баштапкылардын бирөөсү берилген).

№	Функция	Баштапкы функция	№	Функция	Баштапкы функция
1.	$f(x) = k$	$F(x) = kx$	7.	$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$
2.	$f(x) = x^r (r \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{r+1}}{r+1}$	8.	$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$
3.	$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$	9.	$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$	$F(x) = -ctgx$
4.	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	10.	$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = tgx$
5.	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$	11.	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x) = \arcsin x$
6.	$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$F(x) = arctgx$			

§10. Анык эмес жана аныкталган интеграл

1. Анык эмес интегралды табуу үчүн таблица:

1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	5.	$\int \sin xdx = -\cos x + C$
2.	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$	6.	$\int \cos xdx = \sin x + C$

3.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	7.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	8.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

2. ***Аныкталган интегралды эсептөө:*** Эгерде $F(x)$функциясы $f(x)$ үчүн баштапкы функция болсо, анда:

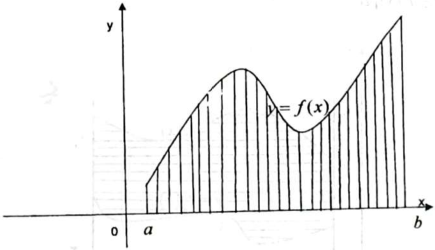
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - Ньютон-Лейбництин формуласы деп аталат.

Мисал 1. .

$$\int_1^e \frac{x-1}{x}dx = \int_1^e \left(1 - \frac{1}{x}\right)dx = (x - \ln|x|)\Big|_1^e = (e - \ln e) - (1 - \ln 1) = e - 1 - 1 + 0 = e - 2.$$

Эгерде $[a, b]$ кесиндисинде $f(x) \geq 0$ функциясы аныкталса, анда $y = f(x)$ ийри сызыгы жана $x = a$, $x = b$ түз сызыктары менен чектелген ийри сызыктуу трапециянын аянты:

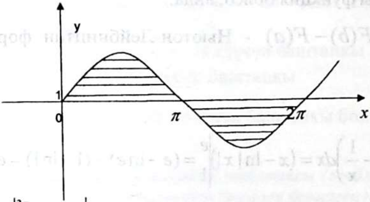
$$S = \int_a^b f(x)dx$$



Эгерде $f(x) \geq 0$ $[a, b]$кесиндисинде, анда $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Эгерде $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесиндисинде белгисин чектүү түрдө өзгөртсө, анда $[a, b]$ кесиндисинде алынган интеграл бөлүк кесиндилерден алынган интегралдардын суммасына барабар

Мисалы. $0 \le x \le 2\pi$ кесиндисинде $y = \sin x$ синусоидасы менен чектелген фигуранын аянтын эсептегиле.



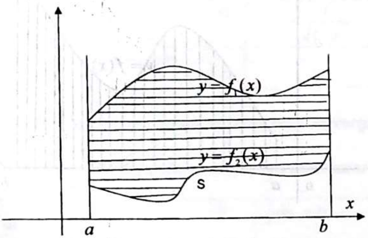
Чыгаруу

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = -\cos x \Big|_0^{\pi} + \left| \cos x \Big|_{\pi}^{2\pi} \right| = -(\cos \pi - \cos 0) +$$

$$+ \left| -(\cos 2\pi - \cos \pi) \ \right| = -(-1-1) + |-1-1| = 2 + |-2| = 4.$$

Эгерде фигура $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ ийри сызыктары жана $x = a$, $x = b$ ординаталары менен чектелсе, жана $f_1(x) \ge f_2(x)$ шарт орун алса, анда ал фигуранын аянты:

$$S = \int_a^b \ [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

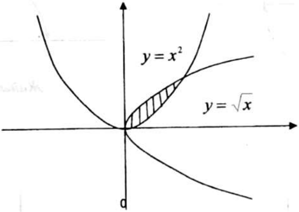


Мисалы. $y = \sqrt{x}$ жана $y = x^2$ ийри сызыктары менен чектелген фигуранын аянтын тапкыла.

Чыгаруу. $\sqrt{x} = x^2$; $x = x^4$, ийри сызыктарынын кесилиши $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

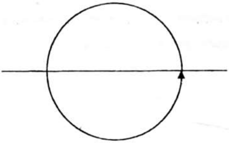
Анда

$$S = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$



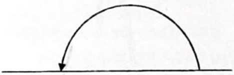
IV БАП. ПЛАНИМЕТРИЯ

§1. Геометриядагы бурчтар



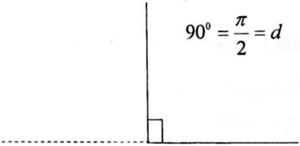
Толук бурч

$180^0 = \pi = 2d$

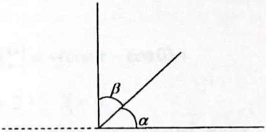


Жайылган бурч

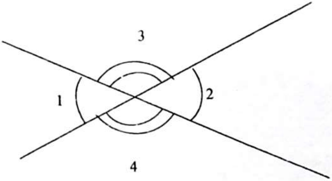
$90^0 = \dfrac{\pi}{2} = d$



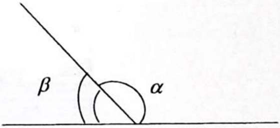
Тик бурч



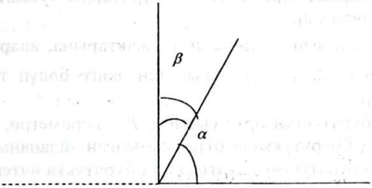
тар бурч $< \dfrac{\pi}{2}$



Вертикалдык бурчтар
$\angle 1 = \angle 2, \ \angle 3 = \angle 4$



Жандаш бурчтар
$\alpha + \beta = \pi = 180^0$

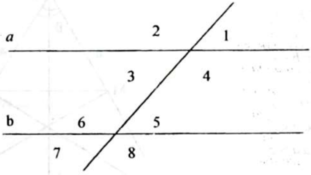


толуктооч бурчтар

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$$

Параллель түз сызыктардагы бурчтар

1. ∠1=∠5, ∠2=∠6,
   ∠3=∠7, ∠4=∠8 –туура келүүчү бурчтар.
2. ∠3=∠5, ∠4=∠6 – ички кайчылаш бурчтар.
3. ∠1=∠7, ∠2=∠8 – тышкы кайчылаш бурчтар.
4. ∠3+∠6=π, ∠4+∠5=π – ички бир жактуу бурчтар.
5. ∠1+∠8=π, ∠2+∠7=π – тышкы бир жактуу бурчтар.



§2. Үч бурчтуктар. Үч бурчтуктагы белгилөөлөр

a, b, c – үч бурчтуктун жактары;

α, β, γ - үч бурчтуктун ички бурчтары;

α', β', γ' - үч бурчтуктун тышкы бурчтары;

$h_a, h_b, h_c - a, b, c$ жактарына тиешелеш түрдө карама-каршы бурчтарынан түшүрүлгөн бийиктиктер;

m_a, m_b, m_c-тиешелеш түрдө *a, b, c* жактарынын ортолору менен аларга карама-каршы жаткан бурчтарды туташтыруучу үч бурчтуктун медианалары;

l_a, l_b, l_c-тиешелеш түрдө a, b, c жактарына, аларга карама-каршы жаткан α, β, γ бурчтарын тең экиге бөлүп түшүрүлгөн биссектрисалар.

MN - үч бурчтуктун орто сызыгы, *P* - периметри, *p* - жарым периметри, *R*- үч бурчтукка сырттан сызылган айлананын радиусу, $S_{\Delta ABC} - ABC$ үч бурчтугунун аянты, *r* - үч бурчтукка ичтен сызылган айлананын радиусу.

Үч бурчтуктун ички бурчтарынын суммасы

$\alpha+\beta+\gamma=180^0$ болот

Үч бурчтуктагы тышкы бурчтарынын суммасы

$\alpha' = \beta+\gamma,\ \beta' = \alpha+\gamma,\ \gamma' = \alpha+\beta,\ \alpha' \succ \beta,\ \alpha' \succ \gamma,\ \beta' \succ \alpha,$

$\beta' \succ \gamma,\ \gamma' \succ \alpha,\ \gamma' \succ \beta$

Үч бурчтуктагы барабарсыздыктар

$a < b + c,\ \mathrm{b} < a + c, \mathrm{c} < \mathrm{a} + \mathrm{b}$

Үч бурчтуктун жактары менен бурчтарынын ортосундагы байланыштар

Эгерде $c < a$ болсо, анда $\gamma < \alpha$

Эгерде $c < b$ болсо, анда $\gamma < \beta$

Эгерде $\alpha < \beta$ болсо, анда $a < b$

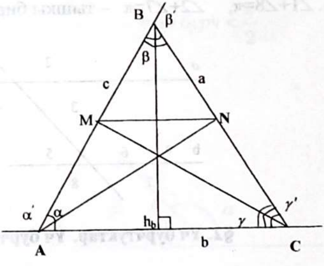
Эгерде $\beta < \gamma$ болсо, анда $b < c$

Эгерде $a > c$ болсо, анда $\alpha > \gamma$

Эгерде $a < b$ болсо, анда $\alpha < \beta$

Эгерде $\gamma < \alpha$ болсо, анда $c < a$

Эгерде $\alpha > \gamma$ болсо, анда $a > c$



Синустар теоремасы

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Косинустар теоремасы

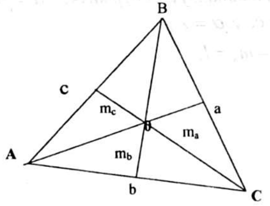
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

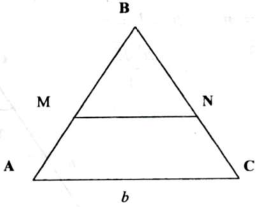
Үч бурчтуктун периметри жана жарым периметри

$P = a + b + c,\ \mathrm{p} = \dfrac{\mathrm{a+b+c}}{2}$



Үч бурчтуктун орто сызыгынын касиеттери

$MN \parallel AC,\ \mathrm{MN} = \dfrac{\mathrm{b}}{2}$



Үч бурчтуктун аянты

$S = \dfrac{1}{2}ah_a, \qquad S = \dfrac{1}{2}bh_b, \qquad S = \dfrac{1}{2}ch_c,$

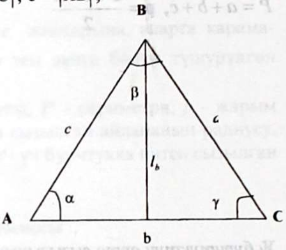
$S = \dfrac{1}{2}ac\sin\beta, \quad S = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha,$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ *(Герондун формуласы),* Мында $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Тең капталдуу үч бурчтук: $a = |BC|$, $c = |AB|$;

$a = c,\ \angle\alpha = \angle\gamma$

$h_b = m_b = l_b$

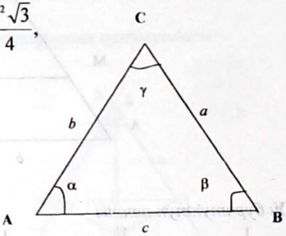


Тең жактуу үч бурчтук

$a = b = c,\qquad \alpha = \beta = \gamma = 60^0; a = |BC|; в = |AC|; c = |AB|$

$h_a = l_a = m_a,\quad h_b = l_b = m_b,\quad h_c = l_c = m_c,$

$R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3},\qquad r = \dfrac{a\sqrt{3}}{6},\qquad s = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4},$



Тик бурчтуу үч бурчтук

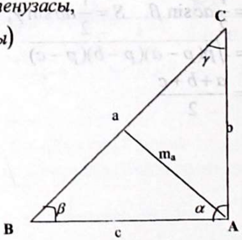
$\alpha = 90^0$, b, c – *катеттери,* a – *гипотенузасы,*

$a^2 = b^2 + c^2$ (*Пифагордун теоремасы*)

$R = \dfrac{a}{2} = m_a,\quad S = \dfrac{1}{2}bc$

$\sin\gamma = \dfrac{c}{a},\ \cos\gamma = \dfrac{b}{a},\ tg\gamma = \dfrac{c}{a}.$

$\sin\beta = \dfrac{b}{a},\ \cos\beta = \dfrac{c}{a},\ tg\beta = \dfrac{b}{c}$



§3. Төрт бурчтуктар.

1. *Параллелограмм*

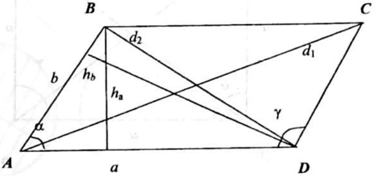
a, b - параллелограммдын жактары

h_a, h_b - параллелограммдын бийиктиктери

d_1, d_2 - параллелограммдын диогоналдары

α, γ - параллелограммдын бурчтары

$\alpha + \gamma = 180^0$



Параллелограммдын аянты

$S = ah_a, \quad S = bh_b, \quad S = ab\sin\alpha$

Параллелограммдын диагоналдары менен жактарынын ортосундагы байланыш

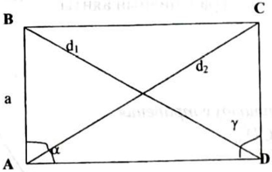
$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

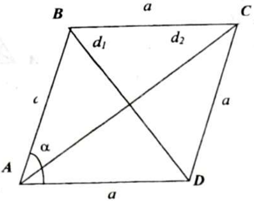
2. *Тик бурчтук*

$\alpha = \gamma = 90^0, \ d_1 = d_2$

$s = ab, \ d_1^2 = a^2 + b^2$



3. *Ромб*



$d_1 \perp d_2, \quad S = a^2 \sin\alpha$

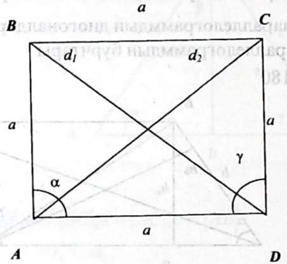
$S = \frac{1}{2} d_1 d_2, \ d_1^2 + d_1^2 = 4a^2$

4. *Квадрат*

$\alpha = \gamma = 90^0,$

$d_1 = d_2, \ d_1 \perp d_2$

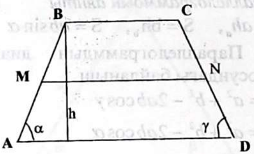
$s = a^2, \ d_1 = a\sqrt{2}$



5. *Трапеция*

$MN = \frac{a+b}{2}$ - трапециянын орто сызыгы

$S = \frac{a+b}{2}h$ - Трапециянын аянты

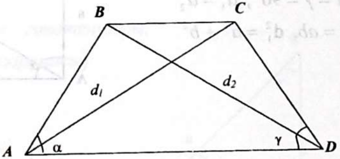


Тең капталдуу трапеция

$|AB| = |CD|;$

$\alpha = \gamma,$

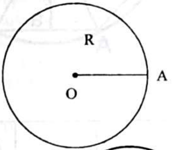
$d_1 = d_2$

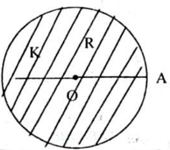


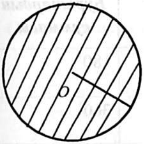
§4. Айлана жана тегерек

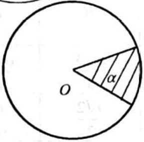
R=$|AO|$ -айлананын радиусу;

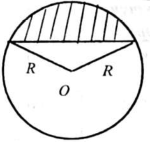
2R=d-диаметр

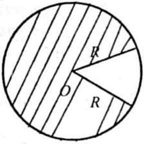












R – айлананын (тегеректин) радиусу.

C = 2πR - айлананын узундугу.

$l = \dfrac{\pi R\alpha}{180^0}$ – *жаанын узундугу,*

S = πR^2 – *тегеректин аянты,*

$S_{сектор} = \dfrac{\pi R^2\alpha}{360^0}$ – *тегеректин секторунун аянты.*

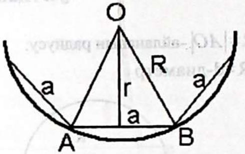
$S_{сегм.} = \dfrac{\pi R^2}{360^0}\alpha \pm S_{\Delta}$ – *тегеректин сегментинин аянты.*

Туура көп бурчтуктар

$$S=\frac{1}{2}R^2 n\sin\frac{360^0}{n},$$

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^0}{n}},$$

$$r=\frac{a}{2tg\frac{180^0}{n}}.$$



№	***Туура көп бурчтуктун түрлөрү***	***α***	***R***	***r***	***Бурчтардын суммасы***
1	Үч бурчтук	60^0	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	180^0
2	Төрт бурчтук	90^0	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	360^0
3	Алты бурчтук	120^0	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	720^0

V БАП. СТЕРЕОМЕТРИЯ

§1. Стереометриянын аксиомалары жана кээ бир натыйжалары

Стереометриянын аксиомалары:

1. Кандай гана тегиздик болбосун ушул тегиздикте жаткан чекиттер да, жатпаган чекиттер да бар.
2. Эгер ар түрдүү эки тегиздик жалпы чекитке ээ болушса, анда алар түз сызык боюнча кесилишет.
3. Эгер ар түрдүү эки түз сызык жалпы чекитке ээ болсо, анда алар аркылуу тегиздик жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана.

Стереометриянын аксиомаларынан чыккан кээ бир натыйжалар:

1. Түз сызык жана анда жатпаган чекит аркылуу тегиздик жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана.
2. Эгерде түз сызыктын эки чекити тегиздикте жатса, анда ал түз сызык бүт бойдон ушул тегиздикте жатат.
3. Бир түз сызыкта жатпаган үч чекит аркылуу тегиздик жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана.

§ 2. Түз сызыктардын жана тегиздиктердин параллелдүүлүгү

Мейкиндиктеги түз сызыктардын параллелдүүлүгү

Аныктамалар:

1. Эгер мейкиндикте эки түз сызык бир тегиздикте жатса жана кесилишпесе, анда алар параллель деп аталат.
2. Кесилишпеген жана бир тегиздикте жатышпаган түз сызыктар кайчылаш түз сызыктар деп аталышат.

Теоремалар:

1. Берилген түз сызыктан сыртта жаткан чекит аркылуу ушул түз сызыкка параллель болгон түз сызыкты жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана.
2. Эки түз сызык үчүнчү түз сызыкка параллель болушса, алар параллель болушат.

Түз сызык менен тегиздиктин параллелдиги

Аныктама: Эгер түз сызык менен тегиздик кесилишпесе, анда алар параллель деп аталат.

Теорема: Эгер тегиздикте жатпаган түз сызык ушул тегиздиктеги кандайдыр бир түз сызыкка параллель болсо, анда ал тегиздиктин өзүнө да параллель болот.

Тегиздиктердин параллелдиги

Аныктама: Эгер эки тегиздик кесилишпесе, анда алар параллель деп аталат.

Теоремалар:

1. Эгерде эки тегиздиктин бири экинчи тегиздикте жаткан кесилишүүчү эки түз сызыкка параллель болсо, анда алар параллель болушат.
2. Берилген тегиздиктен сыртта жаткан чекит аркылуу берилген тегиздикке параллель тегиздикти жүргүзүүгө болот, бирок бирди гана.
3. Эгер эки параллель тегиздик үчүнчү тегиздик менен кесилишсе, анда кесилишүү түз сызыктары параллель болушат.
4. Параллель эки тегиздиктин арасына камалган параллель түз сызыктардын кесиндилери барабар.

§ 3. Түз сызыктардын жана тегиздиктердин перпендикулярдуулугу

Түз сызыктардын перпендикулярдуулугу

Аныктама: Тегиздиктеги сыяктуу эле мейкиндикте дагы; эгерде эки түз сызык тик бурч менен кесилишсе, анда алар перпендикуляр деп аталышат.

Теорема. Перпендикулярдуу түз сызыктарга тиешелүү түрдө параллель болгон кесилишүүчү түз сызыктар өздөрү перпендикулярдуу.

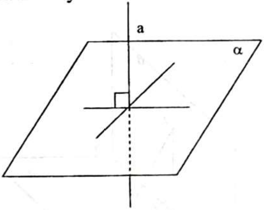
Түз сызык менен тегиздиктин перпендикулярдуулугу

Аныктама: Эгерде тегиздикти кесип өтүүчү түз сызык ушул түз сызык менен тегиздиктин кесилишүү чекити аркылуу өтүүчү тегиздиктин каалаган түз сызыгына перпендикуляр болсо, берилген кесип өтүүчү түз сызык тегиздикке перпендикуляр деп аталат.

Теоремалар:

1. Эгерде тегиздикти кесип өтүүчү түз сызык кесилүүчү чекити аркылуу өтүүчү ушул тегиздиктеги эки түз сызыкка перпендикуляр болсо, анда ал түз сызык тегиздикке да перпендикуляр болот.
2. Эгерде тегиздик эки параллель түз сызыктын бирине перпендикуляр болсо, анда ал экинчисине да перпендикуляр болот.

3.Бир эле тегиздикке эки түз сызык перпендикуляр болсо, анда ал эки түз сызык параллель болушат.



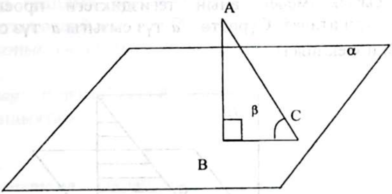
Перпендикуляр жана жантык сызыктар

$AB \perp \alpha$ - перпендикуляр, түз сызык,

AC – жантык сызык,

BC – жантыктын проекциясы,

$\beta = \angle ACB$ түз сызык менен тегиздигинин ортосундагы бурч.

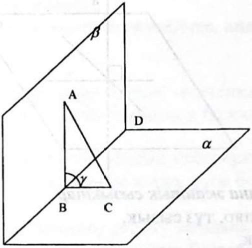


Теорема: Тегиздикте жантыктын негизи аркылуу анын проекциясына перпендикуляр болуп жүргүзүлгөн түз сызык жантыктын өзүнө да перпендикуляр болот.

Тескери теорема: Эгер тегиздиктеги түз сызык жантыкка перпендикуляр болсо, анда ал жантыктын проекциясына да перпендикуляр болот.

Тегиздиктердин перпендикулярдуулугу

γ - бул α жана β тегиздиктеринин арасындагы бурч $\gamma=90^0$ болгондо, $\alpha\perp\beta$ болот.



Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч

Аныктама. Түз сызык менен тегиздиктин арасындагы бурч деп ушул түз сызык менен анын тегиздиктеги проекциясынын арасындагы бурч аталат. Сүрөттө $\bar{a}$ түз сызыгы a түз сызыгынын тегиздиктеги проекциясы.

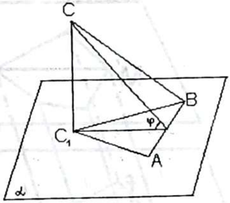
Көп бурчтуктун ортогоналдык проекциясынын аянты

Аныктама. Фигуранын берилген тегиздиктеги ортогоналдык проекциясы деп, ушул тегиздикке перпендикуляр багыттагы анын параллель проекциясы аталат.

Теорема. Көп бурчтуктун тегиздиктеги ортогоналдык проекциясынын аянты анын аянтынын көп бурчтуктун тегиздиги менен анын тегиздиктеги ортогоналдык проекциясынын тегиздигинин арасындагы бурчтун косинусуна болгон көбөйтүндүсүнө барабар.

Мисалы учун:

$$S_{\Delta ABC_{11}} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos\ \varphi .$$



§4. Көп грандыктар

Аныктамалар:

1. Чектүү сандагы тегиздиктер менен чектелген тело көп грандык деп аталат.
2. Эгер көп грандык чектөөчү тегиздиктердин ар биринен бир жакты көздөй жатса, анда ал томпок деп аталат.

Көп грандыктын элементтери: грандары, кырлары, чокулары.

Жеке учурлар: призма, параллелепипед, пирамида, куб, туура көп грандыктар.

1. Призма.

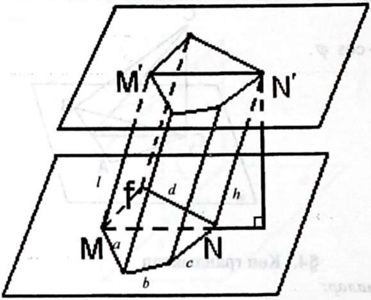
Аныктама. Параллель эки тегиздиктин бириндеги жалпак көп бурчтукту кесип өткөн бардык параллель түз сызыктардын параллель эки тегиздиктин арасына камалган кесиндилери менен түзүлгөн көп грандык призма деп аталат.

Призма тик жана жантык болот. Жантык призманын каптал грандары-параллелограммдар, ал эми тик призманыкы – тик бурчтуктар. Сүрөттө l -каптал кыры, $p=a+b+c+d+f$ негизинин периметри, h – призманын бийиктиги, MNM^1N^1- диагоналдык кесилиш.

Каалагандай призма үчүн S толук бет $2S$ негиз+S каптал бет,

$V = S_{негизи} \cdot \text{h}$ – көлөмү

Тик призма үчүн: $h=l$, $S_{\text{каптал бет}}=pl$



2. Параллелепипед – *негизи параллелограмм болгон призма.*

Параллелепипеддер тик, жантык жана тик бурчтуу болушат. Параллелепипеддин жекече учуру – куб.

Жалпы касиеттери:

1. Параллелепипедде карама-каршы жаткан грандар параллель жана барабар болушат.
2. Параллелепипеддин диагоналдарды бир чекитте кесилишет жана кесилиш чекити менен тең экиге бөлүнүшөт.
3. Параллелепипеддин диагоналдарынын кесилишкен чекити анын симметрия борбору болот.

Жантык параллелепипед үчүн:

$V=S_{\text{нег}}\cdot h$, $S_{\text{толук бет}}=S_{\text{каптал бет}}+2S_{\text{негиз}}$

Тик параллелипед үчүн:

$h=c$, $S_{\text{каптал бет}}=2(a+b)\cdot c$,

$S_{\text{негиз}}=a\cdot b\cdot \sin\varphi$

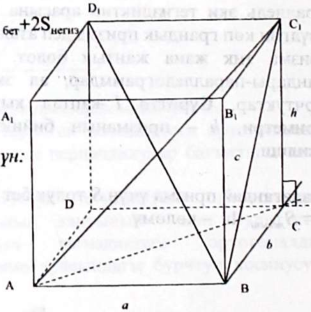
Тик бурчтуу параллелепипед үчүн:

$\varphi=90^0$, $S_{\text{негиз}}=a\cdot b$

$V=a\cdot b\cdot c$,

$d_l^{\,2}=a^2+b^2$, $d^2=a^2+b^2+c^2$.

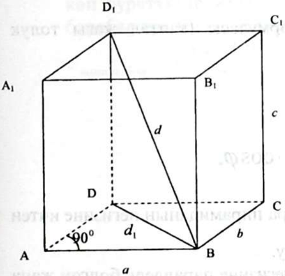
Куб үчүн:

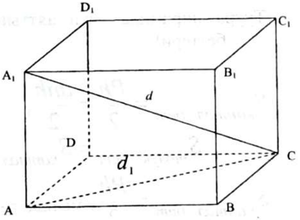


a=b=c

$S_{\text{толук бет}}=6a^2$, $V=a^3$

$d_1 = a\sqrt{2}$, $d = a\sqrt{3}$,



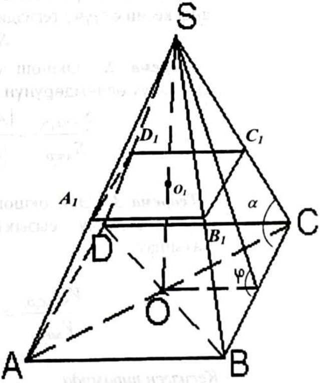


3. Пирамида

n- бурчтуу пирамиданын негизинде n бурчтук жатат.

SO=h –бийитиги, SF=l грандын апофемасы, φ - грандын жантаю бурчу, α - каптал кырынын жантаю бурчу, ρ - негизинин периметри. Көлөмү болсо

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{нег}}\cdot h$$ деп табылат.



Толук бетинин аянты: $S_{\text{толук бет}} = S_{\text{негиз}} + S_{\text{каптал бет}}$ формуласына ээ болот.

Туура пирамида үчүн - төмөнкү учурларды эске алгандагы жекече касиеттери бар::

4. AB=BC=CD=DA=a;

5. О чекити пирамиданын негизинде жаткан туура көп бурчтуктун борбору болот;
6. бардык грандардын φ- жантаюу бурчтары барабар болушат;
7. бардык каптал кырларынын α-жантаюу бурчтары бири-бирине барабар болушат.

Туура пирамида үчүн аяттын формуласы (каптал жагы толук беттери):

$$S_{каптал\ \ бет}=\frac{Ph}{2}=\frac{anh}{2},$$

$$S_{толук\ \ бет}=S_{каптал\ \text{бет}}\cdot\cos\varphi,$$

$S_{каптал\ \ бет}=\frac{Ph}{2}$, мында r - туура пирамиданын негизине ичтен сызылган айлананын радиусу.

Теорема 1. Пирамиданын негизине параллель болгон жана аны кесип өтүүчү тегиздик окшош пирамиданын кесет:

$$S_{A_1B_1C_1D_1}\approx S_{ABCD}$$

Теорема 2. Окшош фигуралардын аянттары алардын сызыктуу өлчөмдөрүнүн квдраттарындай катышат.

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}=\frac{|A_1B_1|^2}{|AB|^2}=\frac{|SO_1|^2}{|SO|^2}=\frac{|SA_1|^2}{|SA|^2}$$

Теорема 3. Эки окшош телолордун көлөмдөрү алардын туура келүүчү сызыктуу өлчөмдөрүнүн кубдарындай катышат.

$$\frac{V_{SA_1B_1C_1D_1}}{V_{SABCD}}=\frac{A_1B_1{}^3}{AB^3}=\frac{SO_1{}^3}{SO^3}=\frac{SA_1{}^3}{SA^3}$$

Кесилген пирамида

Негиздери – окшош көп бурчтар, ал эми каптал грандары трапециялар болушат.

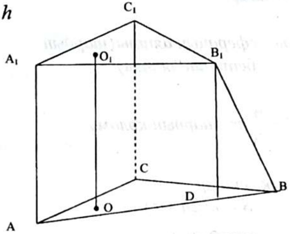
$OO_1=H$- бийиктиги Q, Q_1 – төмөнкү жана жогорку негиздеринин аянттары, $BD=h$- гранынын бийиктиги (апофемасы).

$$S_{\text{толук бет}} = S_{\text{каптал бет}} + a + a_1$$

$$V = \frac{1}{3} H(Q + \sqrt{QQ_1} + Q_1).$$

Туура кесилген пирамиданын негиздеринде туура окшош көп бурчтуктар жатышат; каптал грандары-тең капталдуу барабар трапециялар болушат.

$$S_{\text{каптал бет}} = n\frac{AB \cdot A_1B_1}{2}h$$



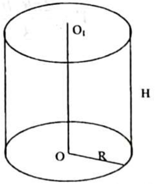
§ 5. Айлануу телолору

1. Цилиндр

$$S_{\text{каптал бет}} = 2\pi RH,$$

$$S_{\text{толук бет}} = 2\pi RH + 2\pi R^2,$$

$$V = \pi R^2 H.$$

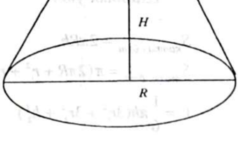


2. Конус

$$S_{\text{каптал бет}} = \pi RL,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$S_{\text{толук бет}} = S_{\text{негиз}} + S_{\text{каптал бет}} = \pi R(L + R),$$



Кесилген конус (Тик тегерек)

$$S_{\text{каптал бет}} = \pi L(R + r),$$

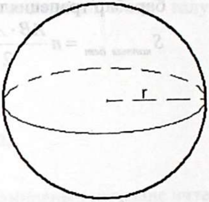
$$S_{\text{толук бет}} = \pi(R^2 + r^2 + L(R + r)),$$

$$V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2).$$

3. Шар

$S = 4\pi r^2$ *сферанын аянты (шардын бетинин аянты)*

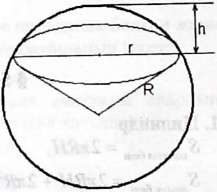
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ *шардын көлөмү*



Шардык сектор

$$S = \pi(2h + r),$$

$$V = \frac{2\pi R^2 h}{3}$$

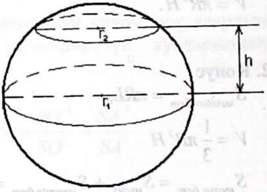


Шардык сегмент

$$S_{\text{каптал бет}} = \pi(r^2 + h^2)$$

$$S_{\text{толук бет}} = \pi(2r^2 + h^2)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r^2 + h^2).$$



Шардык уюл

$$S_{\text{каптал бет}} = 2\pi Rh,$$

$$S_{\text{толук бет}} = \pi(2\pi R + r_1^2 + r_2^2)$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h_2^2)$$

§6. Векторлор жана алардын үстүнөн амалдар

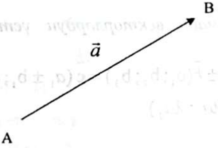
Аныктама: Багытталган кесиндини вектор дейбиз. Аны $\vec{b}$ же $\vec{AB}$ деп белгилешет. Бул кесиндинин узундугун вектордун абсолюттук чоңдугу деп аташат. Аны $|\vec{a}|$ же $|\vec{AB}|$ сыяктуу белгилешет. Эгер $|\vec{a}|=1$болсо, анда $\vec{a}$- бирдик вектор болот.

Эгерде эки вектор бирдей багытталган жана барабар абсолюттук чоңдукка ээ болушса, анда алар барабар болушат.

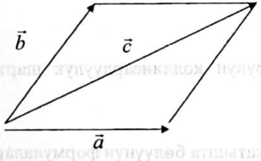
Эгер эки нөлдөн айырмалуу векторлор бир түз сызыкта же параллель түз сызыктарда жатышса, анда алар коллинеардуу деп аталышат.

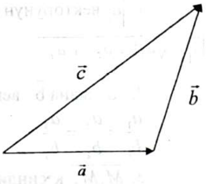
Векторлордун үстүнөн болгон амалдар

1. *Кошуу:* $a + \bar{b} = \bar{c}$

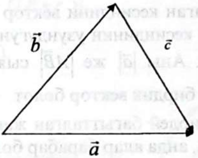


Параллелограмм эрежеси боюнча үч бурчтук эрежеси боюнча





2. *Кемитүү:* $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$



3. *Векторду санга көбөйтүү:* $\lambda \vec{a} = c$ - абсолюттук чоңдугу $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ га барабар болгон $(\vec{a} \neq 0)$ болгон жана, эгер $\lambda > 0$ болсо багыты $\vec{a}$ вектору менен дал келген, ал эми $\lambda < 0$ болсо анын багытына карама-каршы болгон жаңы вектор.

Координаталык формада векторлордун үстүнөн жүргүзүлүүчү амалдар

1. $\vec{a}(a_1; a_2; a_3) \pm \vec{b}(\mathrm{b}_1; \mathrm{b}_2; \mathrm{b}_3) = \vec{\mathrm{c}}\,(a_1 \pm \mathrm{b}_1; a_2 \pm \mathrm{b}_2; a_3 \pm \mathrm{b}_3)$
2. $\lambda \vec{a} = \vec{c}(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_2)$

Векторлордун негизги колдонулуштары

1. $|\vec{a}|$ векторунун абсолюттук чоңдугу:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}}$$

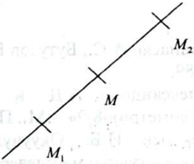
2. $\vec{a}$ жана $\vec{\mathrm{b}}$ векторлорунун коллинеардуулук шарттары: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$

3. $\overline{M_1 M_2}$ кесиндисин λ катышта бөлүүнүн формулалары:

$M_2(x_2, y_2, z_2)$. $\quad x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$,

$M(x, y, z)$. $\quad y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$,

$M_1(x_1, y_1, z_1)$. $\quad z = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}$.



Эскертүү: Эгерде $\vec{a}$ жана $\vec{b}$ векторлору тегиздикте жатышса, анда жогоруда берилген бардык формулалардан, ырастоолордон үчүнчү a_3 жана b_3 координаталарын чыгарып таштоо керек.

Векторлор мейкиндикте формула түрүндө базистик – бирдик векторлордун, б.а. $\vec{i}, \vec{j}$ жана k - лардын жардамы менен да берилет.

$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}$;

$\vec{b} = x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}$;

мында $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$ базистер, ал эми $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ - лер берилген векторлордун ox, oy, oz окторундагы координаталары болушат.

АДАБИЯТТАР:

1. Атанасян А.С., Бутузов В.Б. «Геометрия 7-9». - М., Педагогика, 1989.
2. Александров А.Д. и др. Начало стереометрии 10-11 и «Геометрия-8-9». - М., Педагогика. 1990.
3. Бекбоев И.Б. Окуучулардын математикалык билимдерин тереңдетүүнүн маселелери. Докт. Диссерт. - Бишкек, 1994.
4. Бекбоев И.Б., Тимофеев А.И., Усубакунов Р.У. «Алгебранын мектептик курсу боюнча маселелерди чыгаруунун системалаштыруу». – Фрунзе: «Мектеп», 1976.
5. Бекбоев И.Б., Тимофеев А.И. Стереометриялык маселелерди чыгарууну системалаштыруу. – Фрунзе: «Мектеп», 1982.
6. Крамер В.С. Алгебра и начала анализа (система проведения занятий на подготовительных отделениях вузов). - М.: Высш. школа, 1981.
7. Коротяев Б.И. Учение-процесс творческий: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1989.
8. Махмудов Х., Шабадиков К.Х., Ахмедов З.А. Олий окув уувюртларига кирувчилар үчүн математикадан тест синовларига тайарлаш үчүн кулланма. – Ташкент: «Укитувчи», 1993.
9. Морозов А.Д. Методические рекомендации к составлению типовых заданий и реализация методики типового контроля. - Фрунзе, ФПИ, 1987.
10. Погорелев А.В. «Геометрия-7-11». – Фрунзе: «Мектеп», 1974.

МАЗМУНУ